DOCUMENT RESUME

ED 419 707 SE 061 452

AUTHOR	Pehkonen, Erkki, Ed.
TITLE	Geometry Teaching--Geometrieunterricht. Conference on the Teaching of Geometry (Helsinki, Finland, August 1-4, 1989). Research Report 74.
INSTITUTION	Helsinki Univ., (Finland). Dept. of Teacher Education.
ISBN	ISBN-951-45-5200-8
ISSN	ISSN-0359-4203
PUB DATE	1989-00-00
NOTE	278p.
AVAILABLE FROM	University of Helsinki, Department of Teacher Education, Ratakatu 2, SF-00120 Helsinki, Finland.
PUB TYPE	Collected Works - Proceedings (021) -- Multilingual/Bilingual Materials (171)
LANGUAGE	English, German
EDRS PRICE	MF01/PC12 Plus Postage.
DESCRIPTORS	*Computer Software; *Constructivism (Learning); Educational Technology; Elementary Secondary Education; Foreign Countries; *Geometry; *Mathematics Instruction
IDENTIFIERS	LOGO Programming Language

ABSTRACT

This report contains conference papers on geometry teaching. There were five plenary talks given and a review of Hungarian geometry teaching. The plenary talks addressed background theories of the psychology of learning such as constructivism, perceptional psychology, and motivational psychology. The themes of the 21 short talks were on a varied range of topics from kindergarten to junior high school. The point of emphasis of the conference was on problem-oriented teaching, e.g., pupil activities. Papers include: (1) "Teaching Geometry within the Framework of Constructivism" (J. Leino); (2) "Problems of Language and Communication in the Mathematics Classroom" (H. Maier); (3) "Anregungen der Wahrnehmungspsychologie fur den Geometrieunterricht" (M. Wittoch); (4) "Zum Motivationsproblem im Geometrieunterricht" (E.M. Zbick); (5) "Geometrieunterricht in Ungarn" (A. Ambrus); (6) "Indirekte Denklveisen im Geometrieunterricht" (A. Ambrus); (7) "Using Analogies in Early Secondary Education in Geometry" (G. Becker); (8) "Was nutzt der Computer im Geometrieunterricht?" (P. Bendert); (9) "Computers, Geometry and Logo" (J. Enkenberg); (10) "Flachenauslegen in Klasse 1/2" (A.M. Fraedrich); (11) "Konig Senkrecht IV. und sein Reich" (A.M. Fraedrich); (12) "Problem-Orientated Geometry Teaching with Consideration of Computers" (G. Graumann); (13) "Zur computerunterstutzten Steuerung der mathematischen Begriffsbildung" (L. Haapasalo); (14) "Konstruktion von Aufgabensystemen im Geometrieunterricht" (K. Krainer); (15) "Some Features in the Development of Geometry Teaching" (P. Kupari); (16) "Preschool Geometry" (O. Magne); (17) "Do We Still Need Euclid?" (G. Malaty); (18) "Acht kongruente Wurfel--Vom Bauen mit Bauklotzen zum systematischen Suchen beweglicher Ringe" (K.P. Muller); (19) "Mathematical Activities with the Theorem of the Inscribed Angles" (M. Neubrand); (20) "Verwenden der geometrischen Problemnfelder" (E. Pehkonen); (21) "Planimetrische Konstruktionsaufgaben und problemhafter Unterricht" (G. Pietzsch); (22) "Measuring Areas by Means of Hyperbolas--Teaching Units in Elementary Geometry" (L. Profke); (23) "Elliptische Sektordiagramme" (E. Rosenberg); (24) "Video Films for Geometry Teaching" (P. Sahlberg); (25) "Neue

Moglichkeiten des Geometrielernens durch interaktives Konstruieren" (H. Schumann); and (26) "Exploring Graphs with Logo" (H. Tuominen). (Author/ASK)

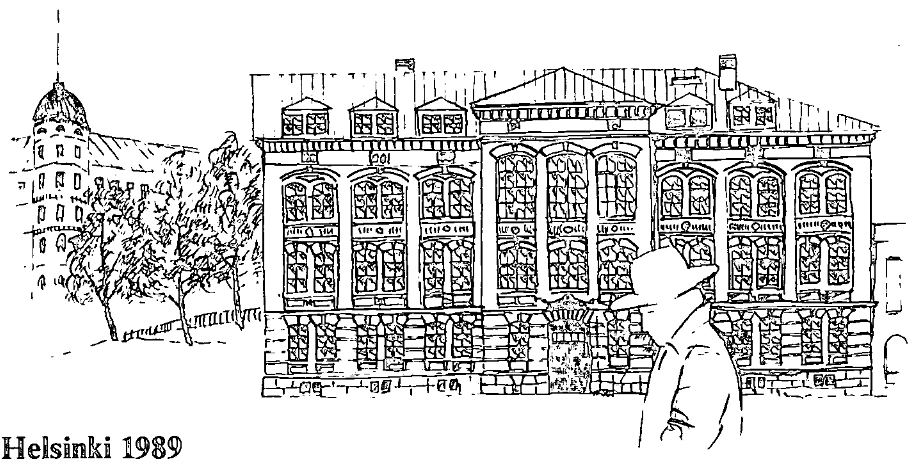
RESEARCH REPORT 74

Department of Teacher Education
University of Helsinki

Erkki Pehkonen (ed.)

GEOMETRY TEACHING — GEOMETRIEUNTERRICHT

Conference on the Teaching of Geometry in Helsinki 1.—4.8.1989



Helsinki 1989

Research Report 74

Department of Teacher Education, University of Helsinki
Ratakatu 2, SF-00120 Helsinki, Finland

Erkki Pehkonen (ed.)

GEOMETRY TEACHING — GEOMETRIEUNTERRICHT

Conference on the Teaching of Geometry
in Helsinki 1.—4.8.1989

Helsinki 1989

ISBN 951-45-5200-8
ISSN 0359-4203
Helsinki 1989
Yliopistopaino

UNIVERSITY OF HELSINKI
DEPARTMENT OF TEACHER EDUCATION

Research Report 74, 1989

Erkki Pehkonen (ed.)
Geometry Teaching - Geometrieunterricht.
Conference on the Teaching of Geometry in Helsinki
1. - 4.8.1989. 278 pp.

Abstract

A conference on the Teaching of Geometry took place in the Department of Teacher Education at the University of Helsinki from the 1st of August to the 4th of August 1989. This report contains almost all the papers given in the conference. The conference was bilingual: in English and in German. In consequence, this report is also bilingual.

There were five plenary talks (Bauersfeld, Leino, Maier, Wittoch, Zbick) and a review of Hungarian geometry teaching (Ambrus); these are the first five papers in the report. The plenary talks dealt mainly with background theories of the psychology of learning, such as constructivism, perceptional psychology, and motivational psychology.

The themes of the 21 short talks (Ambrus, Becker, Bender, Enkenberg, Fraedrich, Graumann, Haapasalo, Krainer, Kupari, Magne, Malaty, Müller, Neubrand, Pehkonen, Pietzsch, Profke, Rosenberg, Sahlberg, Schumann, Tuominen) dealt with a varied range of topics, from kindergarten to junior high school. The point of emphasis was on problem-oriented teaching, e.g. on pupil activities.

Keywords: geometry teaching, pupil activity, practical didactics

ISBN 951-45-5200-8
ISSN 0359-4203

Orders: Department of Teacher Education
University of Helsinki
Ratakatu 2
SF-00120 Helsinki
Finland

HELSINGIN YLIOPISTO
OPETTAJANKOULUTUSLAITOS

Tutkimuksia n:o 74, 1989

Erkki Pehkonen (toim.)
Geometry Teaching - Geometrieunterricht.
Conference on the Teaching of Geometry in Helsinki
1. - 4.8.1989. 278 s.

Tiivistelmä

Helsingin yliopiston Opettajankoulutuslaitoksella järjestettiin 1.-4. elokuuta 1989 Geometrian Opettamisen Päivät. Tämä raportti sisältää miltei kaikki Päivillä pidetyt esitykset. Päivät toteutettiin kaksikielisinä: englanniksi ja saksaksi; siksi tämä raporttikin on kaksikielinen.

Päivillä oli viisi pääluentoa (Bauersfeld, Leino, Maier, Wittoch, Zbick) sekä yleiskatsaus Unkarin geometrian opetuksesta (Ambrus); nämä ovat raportin viisi ensimmäistä artikkelia. Pääluennot käsittelivät pääasiallisesti oppimispsykologisia taustateorioita, kuten konstruktivismia, havaintopsykologiaa ja motivaatiopsykologiaa.

Lyhytluentoja oli kaikkiaan 21 (Ambrus, Becker, Bender, Enkenberg, Fraedrich, Graumann, Haapasalo, Krainer, Kupari, Magne, Malaty, Müller, Neubrand, Pehkonen, Pietzsch, Profke, Rosenberg, Sahlberg, Schumann, Tuominen), ja niiden teemat vaihtelivat kovin, esikoulusta peruskoulun yläasteelle. Erityinen paino oli asetettu probleemakeskiseen opetukseen, kuten oppilasaktiviteetit.

Avainsanat: geometrian opetus, oppilasaktiviteetti, käytännöllinen didaktiikka

ISBN 951-45-5200-8
ISSN 0359-4203

Tilausosoite: Helsingin yliopisto
Opettajankoulutuslaitos
Ratakatu 2
00120 Helsinki

Contents

Introduction 7

Vorwort 9

Leino, J., Teaching Geometry within the Framework of Constructivism 11

Maier, H., Problems of Language and Communication in the Mathematics Classroom 23

Wittoch, M., Anregungen der Wahrnehmungspsychologie für den Geometrieunterricht 37

Zbick, E.M., Zum Motivationsproblem im Geometrieunterricht 57

Ambrus, A., Geometrieunterricht in Ungarn 67

Ambrus, A., Indirekte Denkweisen im Geometrieunterricht 79

Becker, G., Using Analogies in Early Secondary Education in Geometry 89

Bender, P., Was nutzt der Computer im Geometrieunterricht? 97

Enkenberg, J., Computers, Geometry and Logo 107

Fraedrich, A.M., Flächenauslegen in Klasse 1/2 121

Fraedrich, A.M., König Senkrecht IV. und sein Reich 131

Graumann, G., Problem-Orientated Geometry Teaching with Consideration of Computers 141

Haapasalo, L., Zur computerunterstützten Steuerung der mathematischen Begriffsbildung 151

Krainer, K., Konstruktion von Aufgabensystemen im Geometrieunterricht 161

Kupari, P., Some Features in the Development of Geometry Teaching 171

Magne, O., Preschool Geometry 183

Malaty, G., Do We Still Need Euclid? 193

Müller, K.P., Acht kongruente Würfel - Vom Bauen mit Bauklötzen zum systematischen Suchen beweglicher Ringe 203

Neubrand, M., Mathematical Activities with the Theorem of the Inscribed Angles 213

Pehkonen, E., Verwenden der geometrischen Problemfelder 221

Pietzsch, G., Planimetrische Konstruktionsaufgaben und problemhafter Unterricht 231

Profke, L. Measuring Areas by Means of Hyperbolas - Teaching Units in Elementary Geometry 241

Rosenberg, E., Elliptische Sektordiagramme 251

Sahlberg, P., Video Films for Geometry Teaching 259

Schumann, H., Neue Möglichkeiten des Geometrielernens durch interaktives Konstruieren 265

Tuominen, H., Exploring Graphs with Logo 273

Contributors 277

Introduction

The Department of Teacher Education at the University of Helsinki, in cooperation with the Geometry Working Group of GDM (Gesellschaft für Didaktik der Mathematik), organized a conference in Helsinki on practical geometry teaching in the comprehensive school from Tuesday the 1st of August to Friday the 4th of August 1989. This report contains almost all the papers given in the conference.

The Geometry Working Group of GDM was established in March 1982 in Klagenfurt, and has had its two-day autumn conferences (working conference) since 1984 regularly each year: 1984 Technical University of Munich, 1985 Pedagogical High School of Ludwigsburg, 1986 High School Neubiberg (Munich), 1987 University of Kassel, 1988 University of Regensburg. This year we were willing to give an opportunity to a larger group of participants, and in cooperation with the Department of Teacher Education at the University of Helsinki we were able to realize the idea. Most of the participants were from the German Federal Republic and from Finland; some came from Austria, the GDR, Hungary and Sweden. The conference was bilingual: in English and in German. In consequence this report is also bilingual.

The conference comprised two kinds of official activity: talks and follow-up discussions. Informal discussions between the participants also formed a very important part. There were five plenary talks (Bauersfeld, Leino, Maier, Wittoch, Zbick) and a review of Hungarian geometry teaching (Ambrus); these are the

first five papers in the report (unfortunately prof. Bauersfeld has not sent his paper).

With the plenary talks we were trying to give an opportunity to form a coherent view of learning. Therefore the plenary talks were selected in such a way that they dealt mainly with background theories of the psychology of learning, as constructivism, perceptional psychology, and motivational psychology. As we know, the Hungarians have achieved good results in mathematics research as well as in mathematical pupil competitions. Therefore Dr. Ambrus (University of Budapest) was asked to talk about geometry teaching in Hungary, in order to give us some hints regarding the problems of teaching.

The themes of the 21 short talks dealt with a varied range of topics, from kindergarten to junior high school. The point of emphasis was on problem-oriented teaching, e.g. on pupil activities. The short talks covered the practical aspects (teaching units etc.) of the conference.

Addresses of the contributors can be found in the appendix.

Helsinki, November 1989

Erkki Pehkonen

Vorwort

Das Institut für Lehrerausbildung an der Universität Helsinki veranstaltete im Zusammenarbeit mit der Arbeitskreise Geometrie der GDM (Gesellschaft für Didaktik der Mathematik) eine Tagung in Helsinki über praktischen Geometrieunterricht in der Pflichtschule vom Dienstag, den 1. bis Freitag, den 4. August 1989. Dieser Band enthält fast alle die Vorträge der Tagung.

Die Arbeitskreise Geometrie der GDM wurde im März 1982 in Klagenfurt gegründet und hat regelmässig ihre zweitägige Herbsttagung (Arbeitstagung) seit 1984 gehabt: 1984 TH München, 1985 PH Ludwigsburg, 1986 Gymnasium Neubiberg (München), 1987 GSH Kassel, 1988 Uni Regensburg. Dieses Jahr wollten wir die Tagung etwas breiter anbieten, und im Zusammenarbeit mit dem Institut für Lehrerausbildung der Uni Helsinki konnten wir diese Idee realisieren. Die meisten Teilnehmer kamen aus der Bundesrepublik Deutschland und aus Finnland; einige kamen aus der DDR, aus Schweden, aus Ungarn und aus Österreich. Die Tagung wurde zweisprachig durchgeführt: auf Deutsch und auf Englisch; deshalb ist auch dieser Band zweisprachig.

Auf der Tagung gab es zweierlei offizielle Aktivitäten: Vorträge und danach folgende Diskussionen. Daneben leisteten doch die informalen Diskussionen zwischen den Teilnehmern einen wichtigen Beitrag. Insgesamt fünf Hauptvorträge (Bauersfeld, Leino, Maier, Wittoch, Zbick) und einen Übersichtsvortrag (Ambrus) waren vorgesehen; diese sind die fünf ersten Beiträge im Band (leider hat Herr Bauersfeld seinen Vortrag nicht zugeschickt).

Durch die Hauptvorträge hat man versucht, die Möglichkeit anzubieten, Grundlagen für eine einheitliche Lernauffassung zu legen. Deshalb sind die Hauptvorträge so gewählt, dass sie hauptsächlich lern-psychologische Hintergrundtheorien, wie z.B. das Konstruktivismus, die Wahrnehmungspsychologie und die Motivationspsychologie, behandeln. Bekanntlich haben die Ungarn gute Resultate in der mathematischen Forschung und Schülerwettbewerben erreicht; deshalb wurde Herrn Ambrus (Uni Budapest) gebeten, über den Geometrieunterricht in Ungarn zu berichten, in der Hoffnung, dass er einige Hinweise zur Unterrichtsproblematik geben könnte.

Die Themenbereiche der 21 Kurzvorträge variieren sehr, aus dem Kindergarten zur Sekundarstufe I; der Schwerpunkt wurde auf den problemorientierten Unterricht, u.a. Schüleraktivitäten, gelegt. Die Kurzvorträge sollen den praktischen Aspekt (Unterrichtseinheiten, usw.) überdecken.

Die Addresse aller Referanten kann man in der Anlage finden.

Helsinki, im November 1989

Erkki Pehkonen

Jarkko Leino (University of Tampere)

TEACHING GEOMETRY WITHIN THE FRAMEWORK OF CONSTRUCTIVISM

Abstract. Most students have seen elementary geometric figures in their natural environment and used the names of these figures more or less vaguely in every-day communication. It is not possible for a teacher to give an exact definition of mathematicians at the beginning of the learning process. Constructivism emphasizes an individual's own viable constructs of his (or her) environment as the basis of his understanding and meaningful acting. This means that within a certain topic each student has his own curriculum though he may work together with the others on the tasks the teacher has chosen and proposed to them. Some studies indicate that concept formation in geometry includes instances which serve as a basis for the synthesis of a preconcept or holistic prototype before the gradual analysis of common attributes begins.

1. Introduction

One major problem in school education is the fact that the contents of each school subject, though didactically organized, are presented in textbooks in a way which coincides with the theories of the present state of the field and the texts are supposed to be adopted by students the way they were written. Parts of the knowledge adopted are controlled and confirmed or corrected with the aid of small exercises, tests and feedback. Each topic forms a more or less compact portion in the sequence of the whole course and after the summative test it is time for the next topic to be dealt with. The discussions about the contents occur on the level of the theories which are usually high enough for students to answer with more than one word to the teacher's question "What is the name of this..." or "How much is that?". The problem is that all this happens without questions such as "How do these contents help students mental development", "Do students want to deal with these topics and if so how?", "What kind of experiences do students already have about the topic?" and "Are these topics relevant to students' life outside school at the moment?"

One consequence of the kind of teaching is that school learning forms its own segregate which has only minimal relevance in students' everyday language and practice. Knowledge means for them something fragmented and ready to be found in textbooks. The best single factor for students' future achievement in a certain subject is the level of prior knowledge. Even if students' intellectual abilities are partialled out, the correlation between school achievement and prior level of

knowledge assessed a year before or so remains quite high. (See e.g. Weinert 1989.) Students' motivation decreases year after year. The only reason for students to take care of their study is to keep opportunities for moving on to the following step in the byrocratic school system.

Though mathematics is not the worst subject in my pessimistic description above we too, as mathematics educators, are quite eager to serve our "immortal" knowledge systems and "necessary" skills in ready packaged portions and step-by-step fashion to our students to be adopted as such. Mathematics and geometry within it are, to my mind, too fine and respectable human achievements for us to come to respect students' individual ways to make and construct their mathematics. What I want to say is that the standard way to teach math, with teacher introducing small pieces at a time and giving a model for students to follow in similar exercises, is not the best nor relevant way to teach mathematics if we want them adopt a tool for thinking when approaching and solving their problems whatever they might be. The world has changed, students' values are different from what they were, and the demands of the future are unpredictable. I will try to suggest a more relevant and flexible way to teach mathematics in the area of geometry. As a basis for my suggestions I present some results of the psychological research of the past decade concerning especially learning natural concepts.

2. Constructivism

Constructivism is characterized as the continual restructuring of the relations between self and world, where world implies both palpable and ideational reality (Pufall 1988). Knowing is doing, the process in which we try to find a structure or verify our guesses about the reality. It was Piaget who focussed our attention on children's thinking to adapt themselves to the world and make sense of it. We form concepts and categories and build our naive theories of the regulations we think we perceived or the procedures which seemed to be successful. For instance, if the laws of mechanics and the concept of energy etc, introduced by the physics teacher, help a student to understand his (or her) physical problems, he may integrate them into his knowledge system and use them, at least partly, as a basis of thinking, otherwise he will keep his naive theories. School teaching has usually limited possibilities to start with individual students' experiences and naive theories, discuss them and correct them if necessary; these remain usually students' own business.

However, especially in the case of "natural" concepts, examples of which students have met, acted on and spoken about in their ordinary life, long before school has started to "theorize" them, prior knowledge forms the preconditions for learning any new concepts, procedures or approaches. Geometry is full of natural concepts like these (Leino 1988).

Many traditions of thought in philosophy, psychology, linguistics, and antropology imply that categories, we form, are of Aristotelian nature - that is, categories are logical, clearly bounded entities, whose membership is defined by an item's possession of a single set of criterial features, in which all instances possessing the criterial attributes have a full and equal degree of membership (Rosch 1975). The categories of words in natural languages, such as color or shape, appear to possess structures of a quite different character, not a set of criterial features with clear-cut boundings but rather as prototypes of the category: the clearest cases or best examples. Students have, in fact, for many concepts in mathematics, such as geometrical figures (rectangel, parallelogram) or arithmetical concepts (even number and odd number), most typical instances, prototypes (Armstrong et al. 1983, Silfverberg 1986).

To explain these findings new theories have been suggested. Smith (1988) regards 'only a pure prototype' idea too simple and suggests two components: a prototype and a core. Prototype properties tend to be perceptually salient though not perfectly diagnostic of concept membership; in contrast, the properties that comprise the core are most diagnostic of concept membership but tend to be relatively hidden. The prototype has basic properties (the concept 'bird' is 'winged', 'flying', 'nesting in trees' etc.) and the core of crucial (biological) facts. Silfverberg has suggested a process for explaining the development of students' learning of geometrical concepts: in the first stage only a holistic prototype with salient properties is adopted as a synthesis from the instances met, and in the second stage through a gradual analysis of common attributes a more developed concept with sufficient and necessary conditions is formed.

Concepts do not exist in our minds in isolation; rather they are organized into larger mental structures and usually into hierarchies. Concepts, on the prototype level or more developed level, are linked with adjectives (right angel), nouns (line segment), adverbs (precisely in the center-point) or verbs (two lines intersect). They may also be included in some larger frames in our memory systems, being connected with our experiential events, contexts and activities. Finally, we can ask if it is

possible to deal with other kinds of concepts, such as goal-derived, social and situation concepts, basicly in the same way (Smith 1988). It is not necessary to make a sharp distinction between declarative and procedural knowledge. We may have, for instance, a goal to 'lose weight' and it leads to concept 'foods not to eat on a diet', we speak of stereotypes (of good teacher or clever student) which can be regarded as social prototypes, and we construct in our mind schemes of stereotyped situations, named scripts by Schank and Abelson (1977), such as 'going to a restaurant'. It is probable that in math learning we also do the same.

Piaget made a distinction between a scheme, plural schemes, and a schema, plural schemas or schemata, the former refering to operational activities and the latter to figurative aspects of thought. (In cognitive science the corresponding terms are procedural and declarative knowledge.) As a constructivist he emphasized acting on things and ideas; the structure of thought, understanding and problem seeking is derived from acting on, not from the reception of passive perceptions or the accumulation of images or facts. Perceptions need to be interpreted in any act of reflective knowing, and figurative knowledge as the produts of this processing are stored as a function of operative activity (e.g. Piaget 1978, Pufall 1988).

What we emphasize in the following as a psychological basis for teaching geometry is the process of how a student constructs his knowledge (simple concepts about natural objects or more comprehensive schemes or schemas). On the basic level he usually forms a prototype (through inductive thinking) and uses that as a criterion if another example is similar enough to that to belong the same category. The prototype may have several salient features which all are checked in this process. On the more developed level the properties of the prototype are analysed in order to have necessary and sufficient conditions for the concept. However, without special interests or demands students can manage with the prototype concepts in ordinary school tasks and they easily remain on this level. In our ordinary life we do the same: if it is not necessary, why should we think about the exact definition of, say 'dog', 'vehicle', 'pink' or any other natural concept. When the advanced level of concepts is used it implies deductive thinking.

Sometimes we distinguish a third way of thinking besides inductive and deductive and that is analogical thinking. Analogy, in its more sophisticated forms, involves complex comparisons among objects, things, matters or activities. Metaphors, which basicly need some kind of analogical reasoning, are often viewed

as important sources of creative ideas; they enable us apply knowledge acquired in one domain to another domain. Though arts and social fields are regarded as typical domains for metaphorical thinking it is not unknown in mathematics either. Faced with a demanding problem situation our first attempt is usually to retrieve similar tasks and situations from our memory. We can say that we search a solution using inductive thinking. If that does not help the next attempt is usually to analyse the components of the problem and hope that these can give a hint for a solution. Our thinking is then rational, deductive and inductive thinking forward and backward. But if this rational thinking also fails we become bewildered and our mind resorts irrationally different pieces or the whole structure of the problem situation in order to find an analogical hint for solution. In the elaboration process of checking these analogical hints we need, of course, rational reasoning. Thus, at least three different thinking types are needed and used in mathematics as well as other fields: inductive, deductive and analogical.

Constructivism emphasizes the importance of the learner's prevailing structure (concepts) in perceiving anything that is new and searching for new information. What kind of conceptions students form depend on

1) their former conceptions about similar objects
2) their intentions and goals concerning the topic
3) the way new information is set to be received and
4) the context within which all is happening.

The objects and context in learning situation in school have basicly a social meaning: things or concepts are developed for some purpose. What educators can do and have to do is to infer models of students' interests and conceptual constructs about the topic to be learnt and on the basis of these develop hypotheses of how students could be given opportunities to modify their former constructs so that they could master the topic. The most important question is not the content, i.e. the information and its structure in curriculum, but to provide each student with an access to viable knowledge. Educators can not transmit their own constructs to their students' knowledge but only communicate information to be used as a source for the students' constructs.

3. Teaching geometry

Geometry has been taught in schools over two thousand years. The main goal has been in its possibilities for developing students' logical thinking though other objectives have also been

in view, such as giving tools for organizing spatial environment and describing it. Our own century has emphasized the development of students' spatial abilities and visualization even more than logical thinking. (See Pehkonen 1985, 6 - 11.) I think that the biggest problem in geometry teaching today is the old-aged teaching tradition and the marvellous theory systems developed by the famous mathematicians. These two factors, in fact, offer educators models and goals which are very difficult to avoid. Even Freudenthal (1983) in his "Didactical Phenomenology of Mathematical Structures", which I highly appreciate, had problems - as he tells - in writing the chapters of geometry and the result is, to my mind, too strongly loaded with the old theories. The problem is that we are too eager to offer the brilliant ideas of "the old good times" in order to see students' interests and constructs and possibilities to have access to geometric knowledge or to modify and develop their natural concepts and naive theories.

Let us take some examples of the problems mentioned above. Suppose that the official curriculum includes as one topic and objective "students have to become familiar with the properties of quadrangle (tetragon)". As mathematics teachers we start to analyse the topic. Quadrangle means 'four angle', students know what four is but do they really know what angle is in mathematics. Hence, we have to introduce angle. What is angle: is it a static concept, a figure which has two sides and the planar part enclosed by them, or is it a dynamic concept, a turn which is formed when a ray turns around its starting point. Angles have many meanings and they have been approached in mathematics from different points-of-view. Then we have several categories of angles and so on. It is an endless topic for math teachers. This was not any exception because other geometric elements lead to a similar conceptual jungle.

To continue I would like to cite Freudenthal: "Only people who try to explain it to others, have trouble with it." Quadrangles are probably no serious problem to students. Ask them to draw examples of quadrangles and you will have typical cases. If you want to be a constructivist you are interested in where the students have met their figures and what they have done with them. Freudenthal (1983) has presented excellent examples of this "didactical phenomenology". To go on you should have some purpose and plan to deal with all these figures.

Now, what is your goal for introducing quadrangle, i.e. how are students to act on quadrangles? Is it a question for students to be able to identify quadrangles, communicate about their properties, i.e. name them, and to notice how many different

kinds of quadrangles there exist? Then the special types of quadrangles and their names are important as well as non-examples, always with argumentations why they do or do not belong to the family. This is the route how students hopefully start to analyse sufficient and necessary conditions: at first on the level of pictures and later on on the level of words and propositions. You may discuss with students

- why rectangles are so common in their environment,
- how they can be convinced or how they can check that a quadrangle is rectangle, what tools or measuring instruments they need, how they do this if they have only a ruler or if they have a protractor too etc. Soon they probably come up with the idea of measuring the diagonals and then is the time to give them more demanding tasks of the topic.

I think this, as mentioned above, can be done earlier than is normally assumed if the approach is concrete, i.e. mainly on the level of pictures. Piaget's stages of operational development are normally taken too scrictly. Competence of doing something new may not demand crucial qualitative differences or changes between concrete and formal stages. What really changes is the increasing access to some competences (Keil 1988) and this depends on students' acting on different tasks within the topic.

Young students have a tendency to form prototypes or similar representations based on typicality information and keep them as principles in acting. These principles work as constraints or filters to further competences and knowledge. In my opinion teachers should become familiar with these principles of students and give them such tasks which help them to modify the principles. We have some empirical research results (Silfverberg 1986) which show that Finnish mathematics teaching has failed in geometry teaching if the criterion is that at least half of the students on the ninth grade should be able to analyse the properties of basic geometric figures on the level which is higher than that of prototype. I will introduce this research in detail further on.

The kind of working on geometrical figures mentioned above is not just identifying and naming but also developing students' inductive and deductive reasoning (based on pictures), spatial abilities and visualization within familiar and quite normal contexts. To have students to organize their geometrical environment and give their natural concepts exact meanings we have in mathematics oblige us to take their natural environment, things, matters and activities, as a basis of teaching. I don't vant to use the solemn name etnogeometry of this approach, as e.g. d'Ambrosio (1986) did, though it has many similar features.

From the point-of-view of constructivism, in the meaning which I gave it above, learning process is influenced by students' intentions and purposes too. What kind of intentions do our students have when they study mathematics and, in particular, geometry. We have no research results in geometry but we have results from the general motives of math study (Karjalainen 1988). According to these results the motivation is guite high in the lower grades of comprehensive school but declines along the school years. On junior level mathematics is not any more popular. We can draw a conclusion that most of the students want to study mathematics only to the extent it is necessary, i.e to adopt the basic knowledge in textbooks in order to give acceptable answers to the teacher. Standard mathematics teaching is based on math textbooks. Though the textbooks have exercises of so called applied geometry these are traditional and reduced tasks with minimal information, not including students' natural geometrical things. However, the basic knowledge of typical solids (right parallelopipeds, cylinders, cones, spheres) and their properties (volume, area) the students do have, i.e. most of the students are able to remember the formulas and use them, but that is it.

4. Can constructivism improve the present status of geometry knowledge?

In Finland we have quite homogenous school system on the level of compulsory education without any streaming system. Math teaching is the same for all students throughout the 9-year comprehensive school. Students' basic knowledge and understanding are quite good in so called basic tasks, i.e. tasks which are similar to those in textbooks, but quite low in problem-solving tasks in which they have to apply their knowledge. (Kupari 1983).

The best description of Finnish student's understanding of geometry is Silfverberg's (1986) empirical research. As a theoretical basis he used van Hiele levels which are also used in the U.S. (Usiskin 1982). I will present in Figure 2 the overall results but first I have to characterize van Hiele levels in a few words. Only three levels are relevant concerning school learning (Fig. 1, Silfverberg 1986, 86).

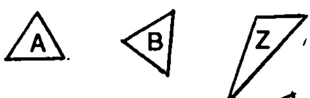
On Level I a student "recognizes a rectangle by its form, shape", "rectangle seems different to him from a square" or he "does not recognize a parallelogram in a rhombus". In the test to reach this level a student should be able "to draw at least three different kinds of triangles" and "to identify a triangle, a rectangle, a square and a parallelogram among figures given".

Fig.1 Special attributions of van Hiele levels

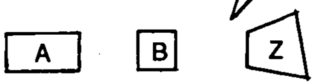
van Hiele level	Dominating memory structure	Phase of the primary concept learning process	Mode of processing an observation
I	Images	Formation of preconcept	Holistic
II	Propositions	Abstractions of common attributes	Partly analytic
III	Principles, rules	Organization of attributes,concept definition	Analytic

On level II a student "knows the properties of the rhombus and can name them" but "the properties are not yet organized in such a way that a square is identified as being a rectangle". In the test to reach Level II a student had to know e.g.

8. What is the property common to A and B but not to Z?

a) 

____

b) 

____

c) 

____________________.

and

9. a) What is the property commont to all squares but not common to all rectangles? ____________________

b) What is the property commont to all rectangles but not common to all parallellograms? ____________________

c) What is the property commont to all equilateral triangles but not common to a single right-angled triangle? __________

On Level III a student "can understand what is meant by proof" and he "recognizes a quadrangle as rhombus by means of certain of its properties, e.g. because its diagonals bisect each other perpendicularly". In the test a student should be able to give "a definition of the rectangle" and correct answers to the questions like

10. Is the following statement true

a) An quadrilateral is always a square if its all sides are equal. ____________________

b) Every rectangle has two shorter and two longer sides. ___

c) Right-angled triangle can be isosceles. ____________

Fig. 2 presents the results of Silfverberg's research. A sample of Finnish junior high school students (N = 83) participated the study and the distribution of their van Hiele levels was as follows:

Fig. 2. The distribution of van Hiele levels of the sample (N = 83)

Grade	Below Level I	Level I	Level II	Level III or over	Not ident.
7th	42 (%)	44	13	1	0
9th	23	34	32	9	2

Compared with the distribution of a U.S. sample (Usiskin 1982) in which the corresponding percentages were 30, 41, 13, 4 and 12 we can regard the results reliable and conclude that though the Finnish achievements are better they still are quite low. Over a half of all the students in the grade 9 are still on the prototype level and, hence, are not able to analyse the properties of elementary figures, such as triangles and quadrangles, even in pictures and only few students can give correct verbal definitions.

It is probably a justified conclusion if we say that the present geometry teaching in Finland remains on "surface stage" and far from deep learning. Our students can use formulas to find the volume and area of elementary solids, identify elementary planar figures on the prototype level and have some knowledge of their analytic properties. If a triangle or rectangle deviates much of the prototype, i.e. two sides are much longer than the third or the other two, then the students are not sure any more.

What we need is a new thinking in curriculum and particularly new methods for teaching geometry. Constructivism, used as a general approach or meta theory, is a good means for teachers to become familiar with students' thinking and conceptions. Working together on concrete geometrical topics may also reveal students' real levels of thinking better than their performances in school tests. Textbooks have, so far, presented old approaches which do not work efficiently any more in our new conditions. The idea of project method may be more efficient that the present standard teaching but it is more demanding and implies that the teachers have their own ideas and courage to change the use of textbooks. More realistic is to suggest that new textbooks will be produced in which geometry teaching is

organized into larger projects to be studied in teams and in a fashion outlined above.

References:

Armstrong, S.L., Gleitman, L.R., Gleitman, H. 1983. What some concepts might not be. Cognition, 13, 263 - 308.

d'Ambrosio, U. 1986. Sosio-Cultural Bases for Mathematics Education. In Carss, M (ed.): Procedings of the Fifth International Congress on Mathematics Education. Boston: Birkhäuser, 1 - 6.

Freudenthal, H. 1983. Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht, Holland: Reidel.

Karjalainen, O. 1988. Matematiikan asenteiden kehitys peruskoulun yläasteella. (The development of students' attitudes to mathematics in comprehensive school.) In Kupari, P.(toim): Koulumatematiikkaa 1990-luvulle: lähtökohtia ja mahdollisuuksia. Jyväskylän yliopisto, KTL, Sarja B, No. 27, 35 - 59.

Keil, F.C. 1988. On the Structure-Development Nature of Stages of Cognitive Development. In Richardson, K., Sheldon, S.(eds.): Cognitive Development to Adolescence. Open University: Lawrence Erlbaum, 83 - 104.

Kupari, P. 1983. Millaista matematiikkaa peruskoulun päättyessä osataan? (What kinds of mathematics are known at the end of comprehensive school?.) Jyväskylän yliopisto, KTL, No. 342.

Leino, J. 1988. Knowledge and Learning in Mathematics. Paper presented for Action Group 1, ICME-6, Budapest, July 27 - August 3.

Pehkonen, E. 1985. Peruskoulun geometrian opettamisen periaatteista ja niiden seurauksista opetukseen. (On the principles of teaching geometry in comprehensive school and the consequences.) Helsingin yliopisto, Opettajankoulutuslaitos, Tutk. 32.

Piaget, J. 1978. Success and Understanding. Cambridge, MA: Harvard Univ. Press.

Pufall, P.B. 1988. Function in Piaget's system: Some notes for constructors of microworlds. In Forman, G., Pufall, P.B.(eds.): Constructivism in the Computer Age. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 15 -35.

Rosch, E. 1975. Cognitive Representations of Semantic Categories. J. of Experimental Psychology: General. Vol. 104, 3, 192 - 233.

Schank, R., Abelson, R.P. 1977. Scripts, plans, goals, and understanding. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Silfverberg, H. 1986. Van Hiele Teoria geometrian opetuksessa ilmenevistä tasoista: Tasojen teoreettinen tarkastelu ja mittausmenetelmien kokeilu. (The Van Hiele Theory about Levels in Learning Geometry: Theoretical examination of the levels and experiment of the measuring methods.) Tampere Univ., Inst. of Educ., Res. report 39.

Smith, E.E. 1988. Concepts and thought. In Sternberg, R.J., Smith, E.E. (eds.): The Psychology of Human Thought. Cambridge, MA: Cambridge Univ. Press, 19 - 49.

Usiskin, Z. 1982. Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. The Univ. of Chicago. ED 220 228.

Weinert, F. 1989. The impact of schooling on cognitive development: One hypothetical assumption, some empirical results, and many theoretical speculations. EARLI News, 8, 3 - 7.

Hermann Maier (Regensburg, BRD)

PROBLEMS OF LANGUAGE AND COMMUNICATION IN THE MATHEMATICS CLASSROOM

Abstract

Three kinds of problems, which often raise from langage in geometrical classroom are discussed. The language of teacher's instructions often has similar effects on pupils as a foreign language: unknown vocabulary is used, conventions of every day language are changed and the meanings of technical words interfere with their meanings in every day language. The building up of concepts often takes too little care for the meaning, sets up too close links to visual aids, or produces too narrow or too broad meanings. The third problem field refers to viololation of unambiguity and consistency in classroom language.

Introduction

The main objective of a research project I am running at present is to unveil processes of understanding in individual pupils that lead to undesired repectively undesirable mathematical concepts in mathematics classroom communication. I try to do that by analyzing videotapes and transcripts of regular lessons and audiotapes and transcripts of interviews carried out with individual pupils in narrow connection with the same lessons.

As most understanding processes are caused by verbal instructions (questions, verbal stimuli, explanations) of the teacher I pay high attention to the language in which the instructions are given. Its form and quality seems to me to be often one of the main sources of misunderstanding, i.e. undesired resp. undesirable ways the processes of understanding takes in the pupils' mind. Some of the problems I met in my research shall be discussed here.

1. Classroom language in mathematics as a "foreign language" for pupils

The language which pupils are accustomed to communicate in, and which, therefore, allows them to understand information and ideas transmitted by other people is their everyday language. The language the teacher speaks in the mathematics classroom and s/he also wants the pupils to communicate in is, however, not even a pure technical language of mathematics, but a mixture of such a language and every day language. Some of its properties make understanding more difficult for pupils. What are these properties?

1.1 Unknown vocabulary

Inevitably the teachers' classroom language in mathematics comprises technical words not existing in everyday language, at least not in the pupil's language, or existing there in quite a different meaning. The number of these words is often underestimated by teachers and reaches, on average, far more than a hundred new words per school year. Above all, geometrical words hold a good part of this number. Alone on the one textbook page discussed above fifteen technical terms are introduced or used: Winkel (angle), Scheitel (vertex), Schenkel (arm), Punktmenge (point set), Halbgerade (straight line), Winkelfeld (angle field), Winkelbogen (angle bow), Winkelbezeichnungen (angle terms), Nullwinkel (zero angle), spitzer Winkel (acute angle), rechter Winkel (right angle), stumpfer Winkel (obtuse angle), gestreckter Winkel (straight angle), überstumpfer Winkel (reflex angle), and Vollwinkel (one revolution).

The seven expressions for different kinds of angles may satisfy a teacher's desire for complete classification and full systematization. But only a few of them will be of real use or even imperative in ordinary communication on geometrical problems. Most of them will never or very seldom be heard and used again (apart from a special test or examination on the topic of angles). The same is true for a

large part of technical vocabulary introduced in mathematics classrooms; it prevents both teacher and pupils from concentrating on the really useful and necessary terminology.

1.2 Changed language conventions

In a mathematical text it is no contradiction to speak of two angles belonging to a pair of straight lines that start from a common point after a definitive statement saying that two straight lines fix an angle. According to the habits of every day language it seems contradictory; here an angle means exactly one angle (or "one and only one angle" as mathematicians would prefer to say). What can be observed in this example is a change of language conventions influenced by norms of technical language use. It is the same change which lets sentences like "A straight line contains two (different) points" appear absolutely senseless to people who are accustomed to following the conventions of everyday language use.
There is a lot of differences in the conventions of mathematical language and everyday language, with most of them concerning the use of logical junctors and quantifiers. A statement like "A square with sides of 1 cm length has the area of 1 cm^2", though mathematically correct, leads to a wrong interpretation for a pupil who makes use of a common convention in everyday communication, namely to understand implications as equivalences. S/he then implies the wrong statement "The area of 1 cm^2 is (only) represented by a square with sides of 1 cm length."
Teachers (and textbooks) often make use of the technical conventions while pupils interprete their language along the guidelines of everyday language conventions. This often causes serious problems of understanding.

1.3 Interference of meanings

For a pupil to be able to understand the language used in the mathematics classroom s/he has to succeed in attaching clear meaning to technical words and expressions. As will be shown later on this is difficult enough a task, because of the special abstract character of mathematical concepts. But it becomes even more difficult in the many cases, in which the technical terms are taken from everyday language but actually used in a different meaning.

- In German everyday language the word "Winkel" is used to describe a part of a room, of a village, or of a landscape and carries the connotation of "enclosed", sometimes also of "narrow". This meaning could possibly help to understand a mathematical angle formed by two shapes in the three-dimensional room, if it measures about 90°. But a pupil who has to understand angles in the plane formed by different positions of the vertext on two intersecting straight lines has to add new meanings to her/his concept of angle. And the generalization of a kind that s/he is able to understand zero angles, straight angles, reflex angles or even full revolutions as angles seems extremely difficult from the starting point of the meaning in every day language.

  There is a lot of mathematical terms which are taken from German every day language but used in a much more general meaning, e.g. Viereck (quadrangle), Pyramide (pyramid), Gerade (straight line), senkrecht (perpendicular), spitzer Winkel (acute angle).
- On the other hand pupils are confronted with mathematical terms taken from every day language which they shall learn to use in a much narrower meaning than they attach to them from every day communication, e.g. Fläche (shape), Linie (line), parallel (parallel).

- Not to forget terms which are mostly used in a meaning absolutely different from everyday language, e.g. Figur (shape), Zylinder (cylinder), Netz (net), Sehne (chord), Mantel (mantle), Seite (side), Ecke (edge), Scheitel (vertex), Schenkel (arm).

What seems to happen in the mind of many pupils dealing with the problem of attaching new meanings to terms which, in their mind, already have the character of fixed concepts from every day communication can be called interference of meanings. The well known "old" meaning disturbs the understanding of a new one, and if the pupil succeeds s/he has the permanent problem of distinguishing the mathematical meaning from other ones. The interference of meanings prevents the pupil again and again from understanding instructions and explanations of the teacher or a textbook like the following ones:

- "Zwei sich schneidende Geraden spannen eine Ebene auf."
  ("Two intersecting straight lines spread out a plane.")
- "Man nennt solche Körper ebenflächig begrenzt. Du kennst aber auch krummflächig begrenzte Körper."
  ("We call solids like you can see marked with a plane boundary. You also know solides marked with a crooked boundary.")
- "Zeichne ein Rechteck mit den Seiten a, b, c, d und die Diagonalen e und f. Schreibe auf, welche Seiten bzw. welche Diagonalen und Seiten sich schneiden oder sich nicht schneiden."
  ("Draw a rectangle with sides a, b, c, d and the diagonals e and f. Note which sides resp. which sides and diagonals are intersecting each other.")
- "$g \cap h = \emptyset$. g und h schneiden sich nicht.
  ($g \cap h = \emptyset$. g and h do not intersect.)

2. Building up concepts

A fundamental condition for the understanding of teacher instructions and explanations by pupils is, as was said before, that the technical vocabulary used in the text build up rich mathematical concepts. My analysis of classroom communication (and textbook representations) unveils that in many cases the pupils have little chance of forming adequate concepts of that kind. There are some serious objections; three of them shall be briefly discussed.

2.1 Too little care for meaning

Among the large number of technical words used in mathematical (geometrical) classrooms only a relatively small number is carefully introduced. (I will come back to that in a minute.) Most geometrical words are taken in use without attempts worth mentioning to provide the pupils' mind with an adequate idea of their meaning. So, the pupils have no other way than constructing their own idea of their meaning and the result of this can strongly differ from the idea the teacher has in his mind and imagines to exist in the pupil's mind, too.

The surprising lack of teachers' care for the meaning of technical vocabulary could be observed in case of very often used, basic geometrical words like

- "height" (many pupils think of a line which has to be vertical resp. parallel to the right and left border of the sheet),
- "perpendicular" (many pupils stick on the usual meaning in every day language and think of a vertical line),
- "side" (many pupils think of a shape instead of a line or an edge),
- "coordinate" and "coordinate system".

2.2 Too close links to visual aids

Many pupils have difficulty understanding instructions, problems and explanations given by the teacher or by a textbook in geometry because their geometrical concepts are too narrowly linked to concrete models or drawings used as visual aids for building up these concepts. This is, in my opinion, due to the fact that visual aids are often used inadequately in geometry classrooms.

- Sometimes the models used are inappropriate for representing the concept they are meant to build up and, thus, pupils get a wrong idea about the meaning of geometrical vocabulary. There are, e.g., teachers and textbooks that introduce the trapezium as the quadrangular part of a triangle which is subdivided by a straight line parallel to one of its sides. How should a pupil be able, with this concept in mind, to understand instructions that demand to regard the parallelogram as a special trapezium. Or what shall we think of the following introduction of the cuboid, taken from a recently published textbook for Gymnasium in Germany:

"Stelle dir einen Würfel aus Gummi vor und ziehe in eine oder mehreren Richtungen seiner Kanten; bleiben hierbei alle rechten Winkel des Ausgangswürfels erhalten, so heiβt der entstandene Körper ein Quader, der im folgenden dargestellt ist." (folgt Schrägbildzeichnung)

"Imagine an elastic cube and pull into one or more directions of its edges. If thereby all right angles of the original cube remain unchanged the solid produced in this way will be called a cuboid, which is shown in the following picture." (follows a drawing).

  Some line futher on the pupil is be told that the cube is a special cuboid. Can s/he understand this?

- Sometimes the pupils' geometrical concepts are too strongly fixed to the one ore two models , to which their introduction was restricted. So they are not able

to grasp the whole extension of these concepts, which often causes difficulty in understanding instructions and problems set up by the teacher.

- Last but not least it often is not seriously enough observed that no special visual aid nor any combination of models, however carefully selected they may be, are really able to represent geometrical concepts in a fully adequate way. The meaning of these concepts is characterized by relations which either have to idealize all models insofar as they can never be realized exactly by them or have to transcend the models when they can not be realized by them at all. No model of a square can have edges absolutely equal in length and perpendicular resp. parallel to each other. There is no drawing of a straight line or a plane which could represent the property of being unlimited, and no visual aid can show two straight lines which have the same distance and do not intersect up to infinity in order to represent the concept of parallel.

  Teachers and textbooks use explanations in the following:

"Da Bäume nach einem Sturm nicht mehr parallel stehen, sich aber nicht schneiden, spricht man in diesem Zusammenhang von windschiefen Geraden."	"As treas don't stand parallel any longer after a strom but also don't intersect we speak in this case of crooked straight lines."
"Die Kante eines Würfels kann man in beiden Richtungen beliebig weit geradlinig verlängern. Es entsteht hierbei eine Gerade."	"The edge of a cube can be extended in both directions to any size. The result will be a straight line."
"Die Form der Ziegelsteine nennen wir in der Mathematik Quader."	"The form of a brick is called in mathematics a cuboid.

"Fertige einen Stapel aus gleichen Mathematikbüchern und du hast in Näherung einen Quader. Verschiebe diese Bücher so, wie du auf dem Foto siehst, und du erhältst einen Spat, wie er bei Kristallen auftritt."

"Form a pile with equal mathematics textbooks and you will get approximately a cuboid. Move the books like you can see in the photograph and you will get a spar as it can be found with crystals."

Pieces of paper or cardboard are called "triangle" or "square" or "parallelogram", etc., models from cardboard or styropor are called "cuboid" or "prism" or "pyramid" etc.

If visual aids are used for building up geometrical concepts it seems very important that the differences between the models and drawings on the one hand and the mathematical meaning of the concepts which shall be represented by them on the other hand are carefully described verbally. It must be clear that only idealized and transcendentalized ideas can really represent the concept, not the visual aids as such. That is the difference between physical and mathematical concepts. Teachers and textbooks, for the same reason, should avoid putting mathematically unsolvable and, therefore, senseless tasks like the following:

"Beschreibe an dem aufgezeichneten Haus, wo Quadrate, Rechtecke und andere Vielecke zu sehen sind."

"Describe, where in the drawing of a house you can see squares, rectangles and other polygons."

"Prüfe, welche der aufgezeichneten Linien parallel sind."

"Check, which lines of the drawing are parallel."

"Überprüfe an den Kanten eines Würfels: zwei Geraden einer Ebene schneiden sich oder schneiden sich nicht."

"Check by means of the edges of a cube: Two straight lines of a plane intersect or do not intersect."

2.3 Too narrow (or too broad) concepts

It can become difficult for pupils to understand a teacher's instruction or explanation when the meaning they attach to geometrical words is narrower (or broader) than the meaning in which the teacher uses them.
Too narrow (or too broad) concepts in the pupils mind can be due to an introduction of too narrow meanings not corrected later on. Examples of the introduction of too narrow meanings can be found in any textbook. Examples:

"Die Form der Seitenfläche des Würfels heiβt Quader."	"The form of a side shape of the cube is called square."
"Einen Körper folgender Art nennt man ein Prisma": (es folgen einige Schrägbildzeichnungen)	"A solid of the following kind is called a prism:" (follow some drawings)

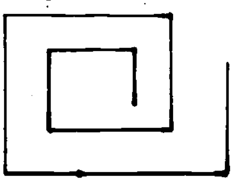
3. Violation of unambiguity and consistency

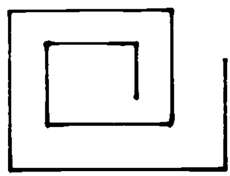
Pupils' understanding can be hindered in case of ambiguous and inconsistent instructions or explanations.
Unambiguity can be violated in teacher, language by use of different words for the same meaning (synonymies) or by attaching different meanings to the same word. In geometry the same words are used for labelling shapes as two-dimensional point sets or as one-dimensional ones (triangle, square, rectangle, circle etc.). The same words and symbols are often labelling geometrical objects and geometrical measures (hight, radius and diameter, surface, etc.) The same kinds of characters mostly stand for constant and for variable points, straight lines and measures within the same context.
Furthermore a teacher's instruction can become ambiguous when it is incomplete in the sense of not giving all the information a learner needs for full understanding. Certainly completeness is not violated on purpose. But often the teacher imagines the pupils could fill the gap from the context or from knowledge previously acquired.

Instruction or the explanations of a teacher or a textbook are called inconsistent here, if statements of the text are in logical contradiction to each other, or if they are in contental contradiction with the conventionalized definition of terms used in it. Sometimes predicates can be contradictory to the definition of subjects within the same sentence.

Examples taken from a German textbook:

"Die Seitenflächen werden von Kanten begrenzt."	"The side shapes are limited by edges."
"Jede schiefliegende Ebene hat eine Richtung, die horizontal ist."	"Each sloping plane has a direction which is horizontal."
"$g \cap h = h \cap g = M$". g und h schneiden sich in der Menge M."	"$g \cap h = h \cap g = M$. g and h intersect in the set M."
"Achte auf paralle und senkrechte Geraden" (in der folgenden Zeichnung).	"Look for parallel and perpendicular straight lines" (in the following drawing).





4. Consequences for language and communication in class room

It would not be right to say that the teachers are not aware of the language problems discussed here. Many of them at least see the pupils' problems with understanding and make attempts to face or even to overcome them. But the ways in which they try to do that seem, at least partly, to raise problems themselves.

One attempt is to build up better geometrical concepts by means of using not one or two but a large variety of concrete models or drawings as visual aids. But in this case

the teacher should not neglect to stimulate a process of finding out the common properties of the models in difference to the varying ones and, thus, of getting a clear idea about the content of the concept.

Another attempt concerns the idea of avoiding technical vocabulary by replacing geometrical words by more "pupil-like" ones. Examples:

- "Zylinder" ("cylinder") is replaced by words like "Säule" (column) oder "Walze" ("roller");
- "X-Koordinate" ("x-coordinate") is replaced by "Rechtswert" ("right-value") and "y-Koordinate" ("y-coordinate") by "Hochwert" ("high-value");
- "Vektor" ("vector") is replaced by "Pfeil" ("arrow");
- "Urbild" und "Bild" ("original" and "picture") of an axis-symmetry are called "Faltpartner" ("foulding partners").

In my opinion it is a dangerous error to suppose that words from pupils every day language would explain the concepts by themselves or could make their building-up easier. On the contrary, the danger of interferences is seriously aggravated. It seems, for example, nearly impossible to subsume a disc which has mathematically the form of a zylinder under the word "column." Many of the words from everyday language lack the necessary generalizability. Could we speak of "Linkswert" und "Tiefwert" ("left-value" and "depth-value") after the introduction of negative coordinates. There is also no sense in using the "pupil-like" words only for the first period of geometrical education. Pupils would have to learn two words for the same concepts and, in addition, would be confronted with the difficulties of change.

My solution of the problem is to use technical vocabulary as conventionalized in mathematics consistently from the beginning, but to restrict the number of technical words to a minimum. Words which cannot be used permanently and which are not necessary for simplifying the teacher's instructions and explanations resp. the pupil's answer and descrip-

tions should not be introduced into classroom communication. They should not be replaced by other words but rather paraphrased or outlined in detail in everyday language. Technical vocabulary should not be regarded as a content of learning, as an end in itself, in mathematics education. It should remain a means for the purpose of expressing ideas and representing informations.

A further attempt to make understanding of language easier for pupils is the idea to avoid homonymies by the introduction of additional vocabulary. The teacher instructs the pupils to distingnish, e.g. between

- "Hohlzylinder" and "Vollzylinder" ("hollow cylinder" and "filled zylinder"),
- "Kreislinie" und "Kreisfläche" ("circle line" and "circle plane"),
- "Abwicklung" und "Netz" ("unwinding" and "net"),
- "Höhe" und "Länge der Höhe" ("hight" and "lenght of hight"),
- "Winkel" und "Winkelmaß" (angle and angular measurement).

In my opinion this attempt is not useful, mainly because it increases the number of technical words the meaning of which is to be known by pupils, and because it makes classroom language awkward and uneconomical. It can hardly be endured in the long term.

There is no other way, according to my opinion, than making the pupils sensible for the change of word meaning in different contexts and to make them flexible in finding out changed meaning from a changed context.

The only real help for understanding in the mathematics classroom is very intensive communication which gives every individual pupil a lot of chances to express her/his concepts and, thus, to create the possibility of mutual control for the teacher and the learner if the concepts which both attach to words are in sufficient jcongruence to each other. This communicational control can help the individual pupil to construct in her/his mind step by step the meaning

and to build up her/his concepts in a way expected by the teacher. Styles of classroom communication which could ensure this have not yet been found. The question-answer style, so common in mathematics classrooms, is certainly not appropriate in this sense.
Last of all I would want more communication about language problems in classes. In a kind of meta-communication the mathematics teachers ought to talk about, e.g., differences in every day meaning and mathematical meaning of words, about changes of meaning in different contexts. Why should the teacher try to solve the problems only by her/himself? Why should s/he not share the problems with her/his pupils and try to solve them jointly?

References

Austin, J.L. und Hawson, A.G. 1979. Language and Mathematics Education. In: Educ.Stud.Math. 10(1979), S.161-197

Griesel, H. 1978. Zu den unterschiedlichen Arten von Termini und ihrer Verwendung im Mathematikunterricht. In: Schriftenreihe des IDM 18/1978, S. 160-170

Laborde, C. 1982. Langue naturelle et écriture symbolique: deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique. Thèse, IMAG Grenoble

Maier H. 1983. Zum Problem der Sprache im Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1983. Bad Salzdetfurth: Franzbecher, S. 30 - 39

Maier, H. 1986. Empirische Arbeiten zum Problemfeld Sprache im Mathematikunterricht. In: ZDM 18(1986)4, S. 137-147

Maier, H. 1989. Zu Problemen der Sprache und der Kommunikation im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Päd. Welt 43(1989)2, S. 83-86

Vollrath, H.-J. 1978. Lernschwierigkeiten, die sich aus dem umgangssprachlichen Verständnis geometrischer Begriffe ergeben. In: Schriftenreihe des IDM 18/1978, S. 57-73

Winter H. 1978. Umgangssprache - Fachsprache im Mathematikunterricht. In: Schriftenr.des IDM 18/1978, S. 5-56

Margarita Wittoch, Reutlingen (BRD)

Anregungen der Wahrnehmungspsychologie für den Geometrieunterricht

Zusammenfassung

Ausgang eines jeden Wahrnehmungsprozesses ist nach J. J. Gibson (1979) ein sich bewegendes Subjekt in seiner Lebenswelt. Im Laufe der kindlichen Entwicklung bilden sich Invarianten heraus, die die Basis der räumlichen Orientierung darstellen. Da jedes Lebewesen und seine Lebensumwelt wechselseitig aufeinander bezogen sind, muß die Information für die visuelle Wahrnehmung dieser Umwelt im umgebenden Licht, das durch die Umwelt strukturiert wird, direkt enthalten sein und vom Lebewesen unmittelbar entnommen werden können. In diesem Sinne ist Gibsons Ansatz als ein ökologischer zu verstehen.

1. Einleitung

Zu den wichtigsten Zielen des Geometrieunterrichts zählen die mir bekannten Autoren - z.B. Besuden 1984, Schwartze 1984, Wölpert 1983 und Ilgner 1974 - die Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens. Da eine wesentliche Voraussetzung dafür die räumliche Wahrnehmung ist, möchte ich diese zum Mittelpunkt meiner Ausführung machen. Meiner Ansicht nach wird dieser Voraussetzung - der Wahrnehmung der uns umgebenden Umwelt - im Geometrieunterricht nicht immer die ihr gebührende Aufmerksamkeit gewidmet.

Mit den Informationen, die ich der Wahrnehmungspsychologie entnehme, möchte ich Mathematiker und Mathematikdidaktiker anregen zu Reflexionen über Inhalte und didaktische Konzeptionen, wie sie im Unterricht unterschiedlicher Schulstufen und Schultypen in verschiedenen Ländern vorzufinden sind.

2. Der ökologische Ansatz einer Wahrnehmungspsychologie

Jedes Lebewesen nutzt seine Wahrnehmung, um seine

natürliche Lebensumwelt handelnd bewältigen zu können und es wäre lebensunfähig ohne diese Umwelt. Beobachter und Umwelt sind ein untrennbares Paar, sie sind zueinander komplementär.

Dies ist einer der Grundgedanken des amerikanischen Psychologen, James Jerome Gibson, der bis zu seinem Tode 1979 mehr als 50 Jahre in der Wahrnehmungspsychologie geforscht und gelehrt hatte. Nach einer Zeit intensiver Auseinandersetzung mit den theoretischen Ansätzen und empirischen Methoden in der amerikanischen Psychologie machte er sich auch mit der europäischen Entwicklung in seinem Fach vertraut. Ausgehend von den Erkenntnissen der verschiedenen psychologischen Theorien entwickelte er einen Ansatz, der sich in grundlegenden Aspekten von den Erklärungsmodellen und den bis zu diesem Zeitpunkt angewandten Forschungsmethoden unterscheidet. In seinem letzten Buch:
The Ecological Approach to Visuel Perception (Bosten 1979) stellte er sein theoretisches Modell im Zusammenhang dar.

Ökologisch heißt für ihn:- Wahrnehmung unter Alltagsbedingungen; - Wahrnehmung der spezifischen Lebensumwelt; - Wahrnehmung als panoramaartiges Erfassen der Umwelt mit Augen in einem Kopf, der sich drehen kann, auf einem Körper der sich fortbewegen kann, weil er von einem Untergrund getragen wird; - Wahrnehmung als aktive Informationsentnahme aus einem beleuchteten Medium; - Wahrnehmung von Angeboten werthaltiger ökologischer Objekte zum Nutzen oder Schaden des Beobachtenden.

3. Wahrnehmung als psychologisches Konstrukt

3.1 Aktive Informationsaufnahme

Alle Formen der Wahrnehmung sind aktive Leistungen einer beobachtenden Person. "Wahrnehmen ist ein Tuchfühlung-Halten mit der Welt, eher ein Erfahrungen sammeln .... Es beinhaltet Aufmerksamkeit ..." (J. J. Gibson 1982, S. 257).

Dieser aktive Prozeß des Aufmerkens kann sich schwerpunktmäßig auf die Umwelt richten oder auf den Beobachter selber zentrieren, aber in den meisten Fällen sind Welt und Selbst als eine Form von Wechselwirkungsprozeß Feld der Aufmerksamkeit. Mit dieser Auffassung setzt sich Gibson deutlich von den traditionellen Theorien der Wahrnehmung ab, die annehmen, daß Lichtstrahlen ein Netzhautbild entstehen lassen - eine Empfindung. Nach Gibsons Ansicht ist ein so vertretenes passives Aufnehmen von Lichtstrahlen für die Funktion von optischen Geräten geeignet, "aber es ist ein verführerischer Irrtum, sich auch das Sehsystem in dieser Weise vorzustellen" (J. J. Gibson 1982, S. 68).

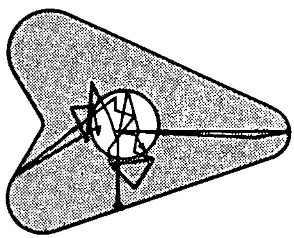
3.2 Kontinuierliche Informationsaufnahme

Wahrnehmung als aufmerksame Informationsaufnahme ist normalerweise eine kontinuierliche Aktivität jedes Lebewesens. "Das Erkunden, sich Orientieren und Anpassen dieser Organe sinkt während des Schlafes auf ein Minimum, aber es hört nie vollständig auf. Wahrnehmen ist daher ein Strömen" (J. J. Gibson, 1982, S. 258).
Bei diesem Aspekt der Neudefinition von Wahrnehmung, wendet sich Gibson vor allem gegen das methodische Experimentieren in der traditionellen Wahrnehmungspsychologie, das er als "Schnappschußsehen" oder "Lochsehen" bezeichnet. Auf diese Vorgehensweise führt er es zurück, daß eine Theorie entstehen konnte, die die Wahrnehmung als eine "Folge von Schnappschüssen" ansieht - analog der Belichtung eines Filmes.

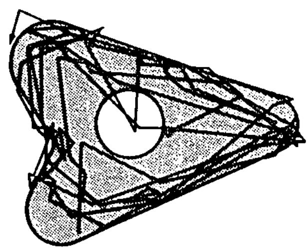
3.3. Ganzheitliche Informationsaufnahme

Ein dritter Aspekt bei der Neudefinition von Wahrnehmung ist das psychosomatische Zusammenspiel eines lebenden Beobachters beim aktiven unaufhörlichen Aufnehmen von Informationen aus seinem Lebensraum. Wahrnehmen läßt sich weder au körperlich somatische Prozeße noch auf bloßes

Bewußtwerden von Abstraktionen reduzieren.
Nach Gibson hat der Raumbegriff nichts mit Wahrnehmung zu tun. Den geometrischen Raum kann man sich vielleicht vorstellen, er ist reine Abstraktion - "sehen kann man ihn nicht" (J. J. Gibson, 1982 S. 3). "Die Lehre, wir könnten die Welt um uns deshalb sehen, weil wir bereits einen Raumbegriff mitbringen, ist reiner Unsinn. Die Wahrheit liegt genau umgekehrt: wir können keinen Begriff vom leeren Raum haben, wenn wir nicht den Boden unter unseren Füßen und den Himmel über uns sehen könnten. Raum als solcher ist ein Mythos, ein Gespenst eine Fiktion, gut für Geometer" (J. J. Gibson, 1982, S. 4).



Trajectory of eye movements of three year old in familiarization with figure (20 seconds)



Trajectory of eye movements of six year old in familiarization with figure (20 seconds)

Abb. 1 Blickbewegungen von 3 und 6-jährigen Kindern bei der Betrachtung eines unbekannten Bildes (Zinchenko et al. 1963, S. 3 - 12, aus: E. J. Gibson 1967, S. 457

Einige dieser Aspekte der neudefinierten Wahrnehmung lassen sich auch durch Beobachtungen im Alltag und in empirischen Untersuchungen bei Kindern bestätigen. Zwischen 3 und 18 Jahren verändert sich das Aufmerksamkeitsverhalten in der visuellen, auditiven und haptischen Wahrnehmung sehr gravierend. Während 3-jährige Kinder noch von ihrer Umwelt gefesselt werden schenken 6-jährige dieser eine aktive Beachtung (vgl. Abb. 1, S. 4).
Deutlich wird das an den Aufzeichnungen der Blickbewegungen von Kindern, die ein unbekanntes Bild betrachten. Mit

zunehmendem Alter entwickeln Kinder immer differenziertere visuelle Suchstrategien. Sie differenzieren mehr und mehr zwischen relevanten und irrelevanten Informationen.

4. Die Umwelt als psychologisches Konstrukt

Die Welt der Physik reicht von Atomkernen über viele Objekte unterschiedlichster Ausdehnung bis hin zu den Galaxien und die meßbaren Größenordnungen von millionstel Millimetern bis zu Lichtjahren. Für die menschliche visuelle Wahrnehmung bezogen auf ihre Umwelt ist der Mittelbereich von Bedeutung, in dem in Millimetern und Kilometern gemessen wird, also nur eine schmale Bandbreite verglichen mit den möglichen Extremen.

Wesentliche Unterschiede zeigen sich auch bei der zeitlichen Ausdehnung von Prozessen und Ereignissen. Die Physik beschäftigt sich mit Prozessen, die zwischen Extremen liegen, wie Kontinentalverschiebungen, die in Jahrmillionen gemessen werden und Ereignissen der Kernspaltung von millionstel Sekunden. Wahrnehmbare Veränderungen, die verhaltensrelevant sind, liegen auch hier nur im Mittelbereich von Jahren und Sekunden. Menschliche Beobachter können die Erosion eines Berges nicht wahrnehmen, wohl aber das Herabfallen eines Felsbrockens. Sie können das Verrücken eines Sessels im Raum bemerken, nicht aber die Verlagerung eines Elektrons in einem Atom. In der menschlichen Umwelt können Änderungen, Ereignisse, und Folgen von Ereignissen wahrgenommen werden, aber nicht die Zeit. "Der Fluß der abstrakten, leeren Zeit hat für ein Lebewesen keine Realität, so nützlich dieses Konzept für den Physiker sein mag" (J. J. Gibson 1982, S. 12). Die radikalsten Änderungen für den Beobachter sind Übergänge von der Existenz zur Nichtexistenz oder auch der Beginn einer Existenz - in solchen Fällen spricht der Physiker von Zustandsänderungen.

In den angesprochenen Dimensionen, Ausdehnung, Masse, Zeit

und Bewegung wurden metrische Einheiten relativ willkürlich festgelegt und vereinbart. Im Gegensatz dazu gliedert sich die beobachtbare Umwelt in natürliche "uneinheitliche" Einheiten, bei denen die kleineren Einheiten in Form von "Verschachtelungen" in die größeren Einheiten eingebettet sind, wie ein Kristall in ein Gebirgsmassiv. Diese natürlichen Einheiten, wie Sandkörner, Kieselsteine oder Felsbrocken sind nicht von einer vollkommenen Gleichförmigkeit wie die physikalischer Skaleneinheiten oder künstlich hergestellter Bodenfliesen.

"Die Basis der irdischen Umwelt im wörtlichen Sinne ist der Erdboden, jene als Unterlage dienende, tragende Oberfläche, die im Durchschnitt flach, das heißt eben ist, und die außerdem horizontal, also senkrecht zur Richtung der Schwerkraft liegt" (J. J. Gibson 1982, S. 10). Welche zentrale Bedeutung Gibson dieser Orientierungsfläche der Wahrnehmung beigemessen hat wird in der Bezeichnung "Bodentheorie" der Raumwahrnehmung deutlich, die er 1950 prägte (J. J. Gibson, 1950).

Lebensraum ist Umgebung von Lebewesen, Umwelt der Menschen, Umwelt von Menschengruppen, der auf der einen Seite für alle die gleichen Angebote bereithält, auf der anderen Seite hat jeder Mensch seine ganz individuelle Lebensumwelt, die von der aller anderen verschieden ist. "Jedes Lebewesen ist, wenn auch in unter-schiedlichem Grade, ein wahrnehmendes und sich verhaltendes Wesen ... ein <u>die</u> Umwelt wahrnehmendes und sich <u>in</u> der Umwelt verhaltendes Wesen. Was aber nicht heißt, daß es die Welt der Physik wahrnimmt und sich im Raum und in der Zeit der Physik verhält" (J. J. Gibson, 1982, S. 8).

5. Begriffe zur Beschreibung der wahrnehmbaren Umwelt

Nach der Lehre der klassischen Physik besteht das Universum aus Körpern im Raum. In Abhebung davon wählt Gibson zur Beschreibung der irdischen Umwelt die Begriffe Medium,

Substanzen und Oberflächen.

5.1. Medium

Das Medium - für Fische das Wasser und für Menschen die Luft - ist für Gibson durch 6 charakteristische Eigenschaften ausgezeichnet.
Ein Gas oder eine Flüssigkeiten ist ein Medium für die Fortbewegung von Lebewesen. Gasförmige und flüssige Medien sind transparent und somit lichtdurchlässig und bieten als homogenes Medium den jeweiligen Lebewesen die Möglichkeit des Sehens. Eine dritte Eigenschaft von Luft und Wasser besteht darin, daß sie Schwingungen oder Druckwellen weiterleiten, wodurch das Anhören von Schwingungsereignissen ermöglicht wird. Viertens kann ein aus Luft oder Wasser bestehendes Medium eine chemische Diffusion von hoher Geschwindigkeit zulassen, sodaß das "Riechen" einer Quelle auch aus einer größeren Distanz möglich ist. Als fünftes, wichtiges Charakteristikum eines Mediums hebt Gibson hervor, daß es den Sauerstoff für die lebensnotwendige Atmung enthält. Schließlich zeichnet sich ein Medium auch dadurch aus, daß es durch die Schwerkraft eine innere Polarität von oben und unten besitzt, eine Absolute vertikale Bezugsachse.
Trotz der vorhandenen Erneuerungszyklen der Medien Luft und Wasser, die in den Jahrmillionen vor dem Menschen für die Aufrechterhaltung eines Gleichgewichtszustandes gesorgt haben, ist es den Menschen gelungen stark verändernd in dieses System einzugreifen (Ozonloch, Luftverschmutzung, Algenpest, Meeres-übersäuerung).

5.2. Substanzen

"Eine Substanz ist dasjenige, woraus Örtlichkeiten und Dinge zusammengesetzt sind. Sie kann gasartig, flüssig, plastisch, viskös oder starr - in Richtung zunehmender Stofflichkeit - sein. Eine Substanz zusammen mit den Möglichkeiten, die sie anbietet, ist hinlänglich deutlich durch Farbe und Textur ihrer Oberfläche gekennzeichnet. Rauch, Milch, Erde, Brot und Holz sind in ihrer

Flächenanordnung polymorph, trotzdem aber invariant in Bezug auf Farbe und Textur. Selbstverständlich kann man Substanzen ebensowohl riechen, schmecken und befühlen wie sehen" (J. J. Gibson 1982, S. 259).

5.3. Oberflächen

Zur Beschreibung der Umwelt hat Gibson die Trias "Medium, Substanzen, Oberflächen" eingeführt. Das Medium wird von den Substanzen der Umwelt durch Oberflächen getrennt. Gibson stellt eine vorläufige Anzahl von ökologischen Gesetzen der Oberflächen zusammen. "Die Gesetze sind untereinander nicht unabhängig und müssen deshalb in ihrer Gesamtheit betrachtet werden.

1. Alle beständigen Substanzen haben Oberflächen, und alle Oberflächen haben eine Flächenanordnung (layout). 2. Jede Ober-fläche setzt seiner Verformung einen Widerstand entgegen, der von der Viskosität der Substanz abhängig ist. 3. Jede Oberfläche setzt dem Auseinanderfallen einen Widerstand entgegen, der von der Kohäsionskraft der Substanz abhängig ist. 4. Jede Oberfläche besitzt eine charakteristische Textur, die von der Zusammensetzung der Substanz abhängig ist. Sie hat im allgemeinen sowohl eine Flächenanordnungstextur als auch eine Pigmenttextur. 5. Jede Oberfläche hat eine charakteristische Form, eine Flächenanordnung im Großen. 6. Eine Oberfläche kann stark und schwach beleuchtet sein, im Licht oder im Schatten liegen. 7. Eine beleuchtete Oberfläche kann einen größeren oder einen geringeren Teil der auf sie fallenden Beleuchtung absorbieren. 8. Eine Oberfläche hat ein charakteristisches Reflexionsvermögen, das von der Substanz abhängig ist. 9. Eine Oberfläche besitzt, in Abhängigkeit von ihrer Substanz, eine charakteristische Verteilung der Reflexions-grade bei verschiedenen Lichtwellenlängen. Diese Eigenschaft der Oberfläche nennen wir ihre Farbe, und zwar in dem Sinne, das verschiedene Verteilungen verschiedene Farben konstituieren" (J. J. Gibson, 1982, S. 24).

6. Umweltangebote an wahrnehmende Lebewesen

"Unter den Angeboten (offerdances) der Umwelt soll das verstanden werden, was sie dem Lebewesen anbieten (offers), was sie zur Verfügung stellt (provides) oder gewährt (furnishes), sei es zum Guten oder zum Bösen" (J. J. Gibson, 1982, S. 137). Das Wort "Angebot" soll zum Ausdruck bringen, daß es sich bei Umwelt und Lebewesen, um eine komplementäre Beziehung handelt.

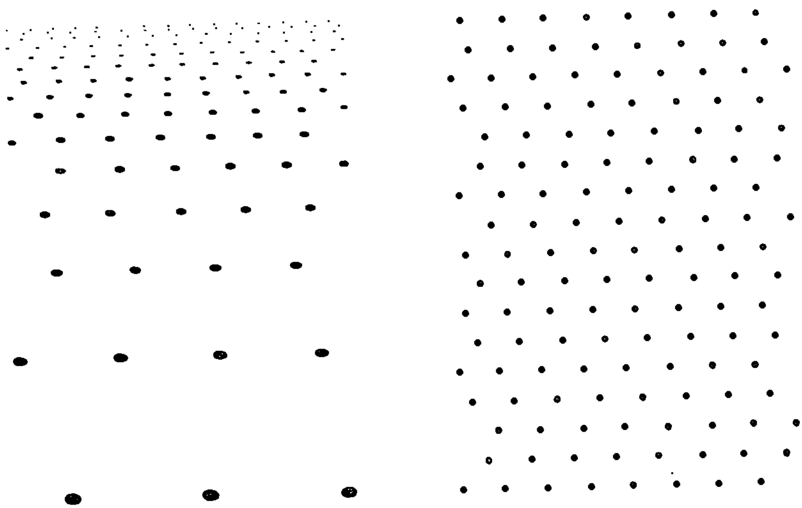


Abb. 2 Fleckverteilungen, die Eindrücke einer longitudinalen und einer frontalen Oberfläche erzeugen (aus: J. J. Gibson, 1973, S. 133)

Eine besondere Form des Lebensraumes wird in der Ökologie mit "Nische" bezeichnet. Die "Nische" eines Menschen enthält eine bestimmte Menge von Angeboten, die das "wie" seines Lebens mitbestimmen (z. B. verschiedenartige "Kindernischen").
Wegen der Unermeßlichkeit der Umweltangebote konzentriert

sich Gibson, auf die Merkmale, die von Lebewesen, die wie wir Menschen Fußgänger sind, wahrgenommen werden können. Dazu gehören: Geländemerkmale; Behausungen; Werkzeuge; andere Lebewesen und menschliche Informationsanzeiger

Im Gelände bietet eine horizontale, flache, ausgedehnte und starre Oberfläche Unterstützung an. Sie ermöglicht Gleichgewicht, das Beibehalten einer bestimmten Körperhaltung und damit wird sie zur Voraussetzung für die Fortbewegung und für Formen des Hantierens. Sie ist nicht nur im wörtlichen Sinne Grundlage des Verhaltens sondern auch Grundlage des visuellen Wahrnehmens, der sogenannten Raumwahrnehmung. Diese Flächen, die parallel zur Sichtlinie verlaufen werden longitudinale Oberflächen genannt.

Variiert bei einer solchen Fläche der Dichtegradient vom Ort des Beobachters aus, dann stellt das eine adäquate Reizinformation für den Eindruck fortlaufender Entfernung dar (vgl. Abb. 2, S. 9).

In den meisten Fällen sind es sowohl Liniengradienten als auch Texturgradienten, die den Eindruck einer

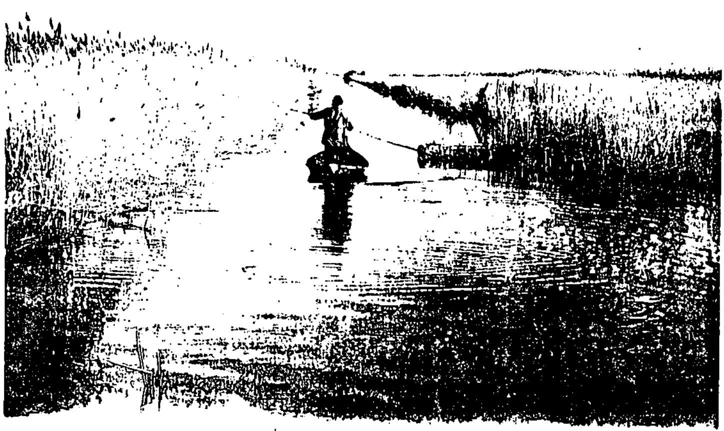


Abb. 3 Die Sümpfe von Scamandre (Camarque) (aus: Das große Buch der Provence, Genéve-Paris 1987, S. 44)

longitudinalen Oberfläche beim Beobachter entstehen lassen (vgl. Abb. 3, S. 10). Für den ökologischen Ansatz der

Wahrnehmungstheorie kommt bei der Abb. 3 noch eine wesentliche Reizinformation hinzu. Sumpf und Wasser veranlassen den Wahrnehmenden zum Anhalten, weil er die Art seiner Fortbewegung ändern muß. Vielleicht läßt sich das seichte Wasser durchwaten oder durchschwimmen. Auf jeden Fall ist die ihn unterstützende Oberfläche - wie es beim festen Boden war - nicht mehr gegeben. Weitere Geländemerkmale, die die übliche Fortbewegungsart nicht mehr zulassen sind Sperren, wie Felswände und Mauern. Oberflächen, die als Barrieren aufgefaßt werden, stehen senkrecht zur Sichtlinie des Beobachters und werden von Gibson frontale Oberflächen genannt (vgl. Abb. 2, S. 9).

Besonders intensiv haben sich Gibson und seine Mitarbeiter mit der Wirkung von Steilkanten auf das Verhalten von jungen Tieren und Menschen beschäftigt. Jede Steilkante

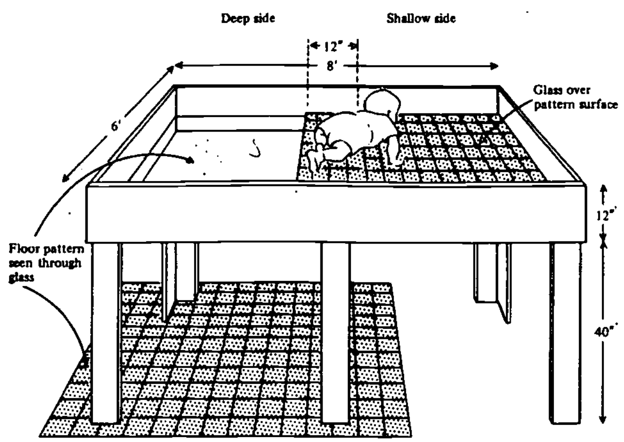


Abb. 4 Zeichnung der Versuchsanordnung zur Überprüfung der "visuellen Klippe" mit Kindern (E. J. Gibson 1967, S. 320)

vermittelt dem sich nähernden Lebewesen den Eindruck ("das

An-Gebot") von Gefahr. Gibson spricht deshalb auch von der "Gefahrenkante" und vom "Gefahrengradienten" (vgl. Gibson 1982, S. 38). Ein Experiment soll diese Wirkung verdeutlichen.
Die experimentelle Anordnung einer "visuellen Klippe" ist in Abb. 4, S. 11 dargestellt. Auf der rechten Seite liegt die Glasplatte direkt über dem karierten Untergrund und bietet genug Platz, sodaß ein Kind darauf herumkrabbeln kann. Auf der linken Seite sieht man durch die Glasplatte

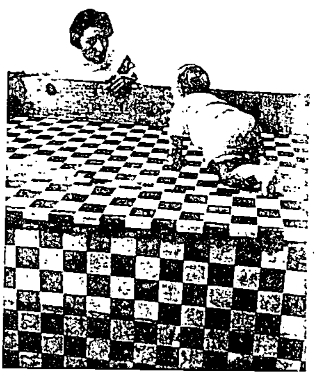


Abb. 5 (links) Kind krabbelt zu seiner Mutter über die "untiefe" Seite (aus: E. J. Gibson and R. D. Walk, 1960, S. 65).

Abb. 6 (rechts) Kind krabbelt nicht über die "visuelle Klippe" zur Mutter (aus: E. J. Gibson and R. D. Walk, 1960, S. 65).

auf einen 40 Inches tiefer liegenden Boden, der das gleiche Karomuster hat. Die Mutter des Kleinkindes steht an der flachen Seite mit einem Spielzeug und lockt das Kind zu sich. Alle 27 Kinder in diesem Versuch - zwischen 6 und 14

Monaten - krabbeln zu ihren Müttern (vgl. Abb. 5, S. 12). Nach 2 Minuten wechselte die Mutter und rief nun von der tiefen Seite aus das Kind zu sich. 24 von 27 Kleinkindern krabbelten nicht auf der Glasplatte über die Kante hinweg zu der Mutter (vgl. Abb. 6, S. 12). Dies ist nur eine von vielen Untersuchungen, die deutlich machte, daß eine Oberflächentextur dieser Anordnung, die "Tiefe-nach-unten-an-einer-Kante" erleben läßt, als Gefahr für die weitere Fortbewegung aufgefaßt wird.

7. Das Wahrnehmungssystem des Menschen

Gibson machte in seiner Forschung deutlich, daß ein Wahrnehmungssystem sich in fünffacher Weise fundamental von dem Sinnesapparat in anderen Wahrnehmungstheorien unterscheidet:

1. Während lokale Reize an der Sinnesoberfläche ebenso lokale Erregungen von Neuronen im Zentrum erzeugen, ist ein Wahrnehmungssystem eine Vernetzung verschiedenartiger Organe, die an dem Wahrnehmungsprozeß beteiligt sind. Im System der visuellen Wahrnehmung bilden Linse, Pupille, Glaskörper und Netzhaut zusammen ein Organ, das die Einstellung der Akkommodation, die Regulation der Lichtintensität sowie die Dunkeladaptation ermöglicht. Auf einer zweiten Stufe kann das Auge mit seinen Muskeln in der Augenhöhle als weiteres Organsystem angesehen werden, das in der Lage ist, Kompensationsbewegungen, Fixation und Umherschauen durchzuführen. Beide Augen im Kopf bilden darüberhinaus ein binokulares System. Dieses erlaubt Konvergenz-einstellungen, die ein Fixieren von nahen Gegenständen ermöglicht und die Ausnutzung der Disparation (Doppelbilder, Tiefensehen). Eine vierte Systemstufe wird durch die Beweglichkeit des Kopfes, an dem sich die Augen befinden, ermöglicht. Bei der Drehung des Kopfes nach rechts entstehen ständig neue Blickfelder. Jedes neue Blickfeld hat einen Überlappungsbereich mit dem

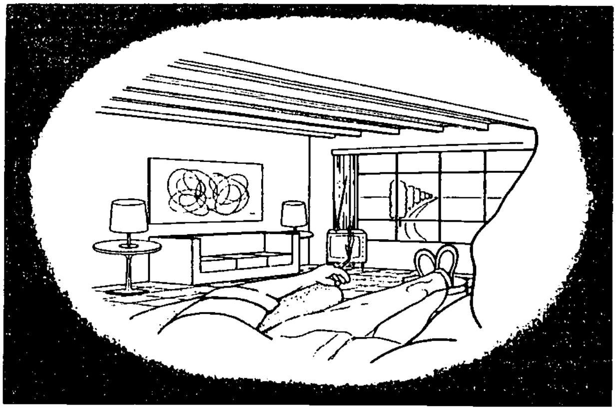


Abb. 7 Abfolge überlappender Blickfelder eines linken Auges bei einer Kopfdrehung von 90°, 1. Position (aus: J. J. Gibson, 1982, S. 128)

vorausgehenden aber es verschwinden stets am linken Rand Informationen während am rechten Rand neue hinzukommen (vgl. Abb. 7, 8, 9; S. 14, 15, 16). Das umfassendste Organsystem basiert auf der Tatsache daß die Augen - an einem beweglichen Kopf - auf einem Körper, Informationen aufnehmen können, während sich der Körper fortbewegt (vgl. Abb. 10, S. 17).

2. Einen zweiten fundamentalen Unterschied zwischen einem Wahrnehmungssystem und einem Sinnesapparat sieht Gibson in der aktiven Form der Informationsaufnahme.

3. Empfindungen eines Sinnesapparats können kombiniert, organisiert, verfeinert, ergänzt und selektiert werden. Im Gegensatz dazu werden die einmal aufgenommenen Informationen eines Wahrnehmungssystems durch ständiges Aktivsein differenzierter, reichhaltiger und präziser. Das Wahrnehmungslernen hört nicht auf solange das Leben

andauert.

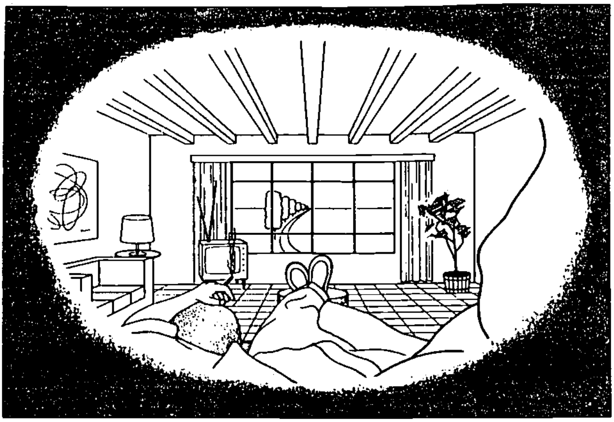


Abb. 8 Abfolge überlappender Blickfelder eines linken Auges bei einer Kopfdrehung von 90°, 2. Position

4. Das Wahrnehmungssystem ermöglicht sowohl Informationen über die Umwelt als auch über die eigene Person. Somit können die Qualitäten des Lebensraumes in Beziehung zu der Bedürfnisstruktur des Beobachters unmittelbar erfahren werden, was Gibson mit "Angebotsstruktur" bezeichnet.
5. In anderen Wahrnehmungstheorien ist Aufmerksamkeit erst im zentralnervösen Bereich möglich, sie wird als eine Form der Bewußtheit angesehen. In Gibsons Wahrnehmungssystem durchdringt die Aufmerksamkeit den Prozeß der Wahrnehmung von Anfang an und geht übergangslos auf das eigene Verhalten über. "Der normale Akt von visueller Aufmerksamkeit besteht darin, den Blick über ein gesamtes Merkmal der umgebenden optischen Anordnung schweifen zu lassen, nicht ein einzelnes Detail der Anordnung zu fixieren. Man ist versucht, Aufmerksamkeit für ein gezieltes Einengen und sich Ruhigstellen zu halten; in Wirklichkeit ist das

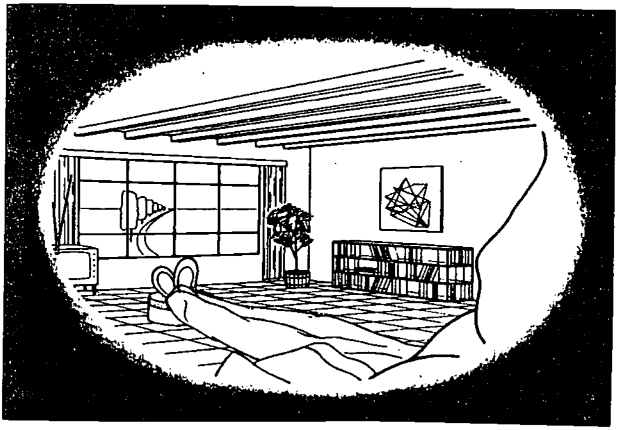


Abb. 9 Abfolge überlappender Blickfelder eines linken
Auges bei einer Kopfdrehung von 90°, 3. Position

selten. Die Strukturinvarianten in einer optischen Anordnung, die die Information tragen, sind eher Gradienten als Details, und sie werden über weite Winkel abgetastet" (J. J. Gibson, 1982, S. 265).

8. Der Begriff der Invarianten in der ökologischen Optik

Das visuelle Wahrnehmungssystem verfügt über die Fähigkeit, gleichzeitig sowohl Beständiges wie Sich-Änderndes zu entdecken in der Umwelt, an anderen Lebewesen aber auch am Betrachter selber. Dabei ist die Beständigkeit relativ, man kann sie auf einen Tag, ein Jahr oder ein ganzes Leben beziehen. "Die abstrakten Begriffe "Invarianz" und "Varianz" der Mathematik sind mit dem verwandt, was hier unter Beständigkeit und Wechsel verstanden wird ... jeder Begriff (ist) der reziproke des jeweils anderen" (J. J. Gibson, 1982, S. 13). Eine ausschließlich invariante Welt

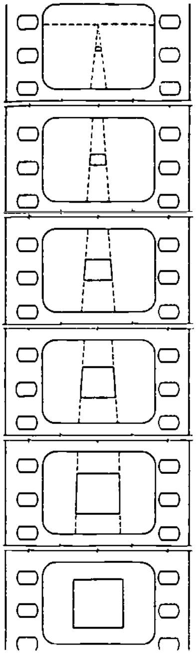


Abb. 10 Die aufeinanderfolgenden Transformationen, die das Bild eines quadratischen Pflastersteines erfährt, während ein Mensch auf der Straße auf ihn zugeht (aus: J. J. Gibson 1973, S. 229)

wäre starr, kalt und ohne Leben und eine sich nur verändernde Welt - vielleicht aus wirbelnden Materiewolken bestehend - machte auch kein Leben möglich." In beiden Extremfällen würde es zwar Raum, Zeit, Materie und Energie geben, aber keinen Lebensraum" (J. J. Gibson, 1982, S. 14). Die entscheidenden Informationen die der wahrnehmende Mensch in seiner Umwelt sucht, sind die "Nichtveränderungen" in den Veränderungen, das Invariante unter Varianten. Die Beständigkeit in der Veränderung ist aber nur innerhalb erlebbarer Zeiten erkennbar, deshalb ist jede Form des Wahrnehmens ein kontinuierlicher Prozeß.

Am Ende seiner Forschungsarbeit postuliert J. J. Gibson vier Arten von Invarianten:

1. Invarianten die der Änderung durch Überlappung der Blickfelder zugrunde liegen. Obwohl die Informationen der einzelnen Blickfelder sich ändern, sobald wir den Kopf drehen, erleben wir die Beständigkeit des Raumes und die unserer eigenen Position (vgl. Abb. 7, 8, 9 S. 14, S. 15, 16).

2. Invarianten, die der Änderung des Beobachtungsortes zugrunde liegen. In den mit der Bewegung des Beobachtungsortes sich verändernden Perspektiven, bleiben jedoch Verhältnisse zwischen Winkeln und Proportions-verhältnissen

invariant (vgl. Michaels + Carello, 1981). Es sind diese in der perspektivischen Struktur invariant bleibenden Verhältnisse durch welche die Fläche z.B. als quadratisch gekennzeichnet wird. (Gibson 1979/1982, S. 78 vgl. Abb. 10, S. 17).

3. Invarianten, die der Änderung der Beleuchtung zugrunde liegen.

4. Lokale Invarianten, die der lokalen Störung der Struktur der optischen Anordnung zugrunde liegen. Unter lokalen Ereignissen versteht Gibson nicht nur Verlagerungen und Drehungen von starren abgesonderten Objekten sondern auch Deformierungen von gummiartigen Oberflächen. Beispiele wären das Aufblasen eines Luftballons, die Veränderung der Wasseroberfläche bei Sturm, das Lächeln und Weinen in einem Gesicht und das Heranwachsen eines Kindes. In jedem Fall kann man eine spezifische Störung der optischen Struktur wahrnehmen und trotzdem wird die betreffende Oberfläche Luftballon, Wasser, Gesicht und Person fortwährend als sich selbst gleichbleibend erlebt und zwar aufgrund von etwas, das in der optischen Struktur nicht gestört ist (J. J. Gibson, 1982, S. 335).

Bezogen auf seinen theoretischen Ansatz einer ökologischen Wahrnehmungspsychologie räumt J. J. Gibson ein, daß alle diese Bezeichnungen, Begriffe und Erklärungsmodelle mit dem Klarerwerden des ökologischen Konzeptes revidiert werden können. Auf keinen Fall sollen sie das Weiterdenken und Forschen hemmen, wie es bisherige Begriffe und Vorstellungen seiner Ansicht nach häufig getan haben.

Auf jeden Fall ist es J. J. Gibson gelungen (vgl. Munz 1989) eine intensive und fruchtbare Diskussion bei Wissenschaftlern, mit unterschiedlichsten theoretischen Standpunkten anzuregen. In den Anwendungsbereichen der Wahrnehmungspsychologie - der Architektur, des Design und der Kunst hat man diesen ökologischen Ansatz bisher nur sporadisch beachtet. Ich hoffe, daß einige Gedanken dieser ökologischen Wahrnehmungspsychologie auch für den

Geometrie-unterricht fruchtbar gemacht werden können. Das scheint mir im Rahmen einer engen Zusammenarbeit von Mathematikdidaktikern und Psychologen durchaus möglich.

Literatur

Besuden, H. 1984. Knoten Würfel Ornamente, Stuttgart
Das große Buch de Provence, Genève, Paris 1987
Gibson, E. J. 1963. Development of perception: Discrimination of depth compared with discrimination of graphic symbols. In: J. C. Wright and J. Kagan (Eds.) Basic cognitive processes in children. Monogr. Soc. Res. Child. Develpm., 28, No 1. 5 - 24
Gibson, E. J. 1967. Principles of Perceptual Learning and Development. New York
Gibson, E. J. + Bergman, R. 1954. The effect of training of absolute estimation of distance over the ground. Journal of Experimental Psychology, 48, 473-482
Gibson, E. J., Bergman, R. + Purdy, J. 1955. The effect of prior training with a scale of distance on absolute und relative judgments of distance over ground. Journal of Experimental Psychol., 50, 97 - 105
Gibson, E. J., Gibson J. J., Smith, O. W. + Flock, H. R. 1959 Motionparallax as a determinant of perceived depth. Journal of Experimental Psychology, 58, 40 - 51
Gibson, E. J. + Walk, R. D. 1960. The visual cliff. Scientific American, 202, 64 - 71.
Gibson, J. J. 1950. The perception of the visual world, Boston, Deutsche Übersetzung: Weinheim 1973
Gibson, J. J. 1979. The Ecological Approach to visual Perception, Boston, Deutsche Übersetzung München, Wien; Baltimore 1982
Gibson, J. J. + Gibson E. J. 1955. Perceptual learning: Differentiation or enrichment? Psychological Review, 62, 32 - 41
Ilgner, Kurt (1974). Die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens von Klasse 1 bis 10. In: Mathematik in der Schule, 12, 693 - 714
Michaels, G. and Carello, C. 1981. Direct Perception. New Jersey
Munz, Christian, 1989. Der ökologische Ansatz zur visuellen Wahrnehmung: Gibsons Theorie der Entnahme optischer Information. In: Psychologische Rundschau, 40, 63 - 75
Schwartze, Heinz, 1984. Elementarmathematik aus didaktischer Sicht. Bd. 2 Geometrie, Bochum
Wölpert, Heinrich, 1989. Materialien zur Entwicklung der Raumvorstellung im Mathematikunterricht. In: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 29, Heft 6, 7 - 42
Zinchenko, V. P., van Chzhitsin and Tarakanov, V. V. 1963. The Formation and development of perceptual activity. In: Sov. Psychol. and Psychiat., 2, 269 - 296.

Eva Maria Zbick (Duisburg, BRD)

ZUM MOTIVATIONSPROBLEM IM GEOMETRIEUNTERRICHT

Zusammenfassung

Auf der Grundlage einer Untersuchung über die Behandlung des Motivationsproblems in der Mathematikdidaktik werden Motivationsmöglichkeiten für den *Geometrie*unterricht erörtert. Durch einen Vergleich von Motivationsaussagen in der Mathematikdidaktik mit denen in Psychologie und Pädagogik wird auf noch wenig genutzte Möglichkeiten zu motivieren hingewiesen. Es zeigt sich, daß relativ viele der in der Fachdidaktik zusammengestellten Beispiele für motivierende Aufgaben und Problemstellungen aus der Geometrie stammen.

Gefragt wird, ob und wie Schüler speziell im *Geometrieunterricht* motiviert werden können. Dazu soll zunächst gefragt werden, wie Motivation im Mathematikunterricht generell erreicht werden kann und wie Motivation in der Psychologie und in der Pädagogik beschrieben und klassifiziert wird.

In welcher Form das Motivationsproblem in der Fachdidaktik Mathematik insgesamt dargestellt wird und welche Hilfen diese einer Motivierungs*praxis* anbietet, wird in der angegebenen Literatur im einzelnen untersucht. Darüber ist zu berichten.

Zunächst werden die Aussagen der Motivationspsychologie, der pädagogischen Psychologie und der allgemeinen Pädagogik danach befragt, welche für *Unterricht* nutzbaren Motivationsphänomene sie erforscht haben, ob und wie sich von daher die Probleme der Fachdidaktik sehen und ordnen lassen und wo - bislang nicht hinreichend genutzte - Möglichkeiten zum Motivieren im Mathematikunterricht noch zu finden sind.

In der psychologischen Motivationsforschung sind es vornehmlich die Theorien zur Leistungsmotivation, zur Kausalattribuierung und zur Inkongruenz, aus denen motivationsbewirkende Maßnahmen für den Schulunterricht zu gewinnen sind.
Für die Leistungsmotivationstheorie ist die wesentliche Variable zur *kurzfristigen*, d.h. zur *situativen* Beeinflussung von Motivation die "Auswahl geeigneter Schwierigkeitsgrade" bei Aufgaben und Problemstellungen. Diesen Sachverhalt beschreibt das ATKINSON-Modell, aber auch seine Erweiterungen und Abwandlungen. Es gibt so mehrere, zum Teil auch voneinander abweichende Meinungen und Ergebnisse darüber, wie sich Variation von Aufgabenschwierigkeit auf Motivation auswirkt. Die Aussagen unterscheiden sich insbesondere danach, welche Eigenschaften der zu motivierenden *Person* und welche Bedingungen der *Lernsi-*

tuation als zusätzliche Variable in die Untersuchungen einbezogen wurden.
In der Theorie der Kausalattribuierungen wird aufgezeigt, in welcher Weise Erfolge und Mißerfolge Motivationen beeinflussen können (WEINER, u.a.). Man findet dort Maßnahmen und Verhaltensregeln, die Lehrer und Erzieher im Umgang mit Erfolgs- und Mißerfolgserlebnissen zu beachten haben, wenn sie die allgemeine Motivationslage ihrer Schüler *langfristig* verbessern wollen. Im einzelnen sind dabei wieder spezielle situative und persönlichkeitsabhängige Bedingungen zu berücksichtigen.
Im Zusammenhang mit den Inkongruenztheorien sind besonders die Arbeiten von BERLYNE zu nennen. Berlyne untersucht, wodurch Neugier angeregt und wodurch kognitive Konflikte herbeigeführt werden können. Als wichtigste Eigenschaften der Stimuli, die Explorationsverhalten auslösen, nennt Berlyne Neuartigkeit, Veränderung, Komplexität, Ungewißheit, Mehrdeutigkeit, Überraschung. Er gibt Typen gedanklicher Konflikte (sog. Inkongruenztypen) an, wie Zweifel, Verwirrung, Widersprüchlichkeit, u.a.. In den Inkongruenztheorien werden Wege aufgezeigt, wie durch Erzeugung spezieller Inkongruenzen innerhalb der Darstellung von Unterrichtsinhalten die Aufmerksamkeit von Schülern auf den Unterrichtsgegenstand *gelenkt* werden kann und wie Schüler zur Suche nach Informationen *angeregt* werden können. Da hierbei insbesondere der Unterrichts*gegenstand* Motivationskraft gewinnt, werden Inkongruenztheorien i.a. als Grundlage für *intrinsisches* Motivieren herangezogen. Motivationsfördernd sind Inkongruenzen jedoch nur innerhalb eines "optimalen Niveaus", das wiederum nur dann erreicht werden kann, wenn bekannt ist, welche äußeren Bedingungen und welche Besonderheiten der Schülerpersönlichkeit vorliegen. Das liest man in der Literatur ausführlich nach.

In der Pädagogik wird öfter konstatiert, daß die psychologische Motivationsforschung kaum *eindeutige* Handhabungen für eine Motivierungspraxis liefert. Dennoch findet man bei den Pädagogen Hinweise darauf, *wie* Ergebnisse der Psychologie auf Motivation im Unterricht angewendet werden sollten. Solche Hinweise nehmen Bezug auf die Bedeutung von Erfolg, Mißerfolg und Bekräftigungen, sowie auf die Schaffung geeigneter Aufgabenschwierigkeiten und optimaler Inkongruenzen.
Nach dem Modell HECKHAUSEN zur Lernmotivierung - das sich an die Theorie von ATKINSON anlehnt - ist ein *mittlerer* Grad an Aufgabenschwierigkeit die vom Lehrer *vorrangig* zu verwendende Maßnahme für eine Motivierung des Schülers. HECKHAUSEN spricht vom "Prinzip der Passung", einem inzwischen als klassisch zu bezeichnenden Begriff, der auch in der Mathematikdidaktik oft gebraucht wird, wenn im Zusammenhang mit Motivationsfragen auf erziehungswissenschaftliche Aussagen rekurriert wird. Für Aufgaben, die besonders auf *künftige* Ziele gerichtet sind, rät HERBER, den Schwierigkeitsgrad je nach Länge der noch zu bewältigenden Aufgabenserie zu *senken*. Die Frage, ob mehr Motivation durch *mittelschwere* oder durch *leichte* Aufgaben erreicht wird, ist auch in den pädagogischen Wissenschaften noch nicht entschieden. Auch die BERLYNEschen

Inkongruenztypen sind von den Pädagogen aufgegriffen und spezieller für Motivation in der Schule bearbeitet worden. Man findet dort Beispiele, auch für die Mathematik.
Andere Motivierungsmaßnahmen ergeben sich für die Pädagogik aus der Erörterung von sozialen Beziehungen und aus methodischen Verfahrensweisen im Unterricht selbst.

Dem Thema Motivation wird in der **Mathematikdidaktik** sehr große Beachtung geschenkt. Dennoch gibt es nur wenige Beiträge, die *ausschließlich* die Motivationsproblematik behandeln. Betrachtet man Art und Umfang der Berücksichtigung psychologischer und pädagogischer Motivationsforschung in der Fachdidaktik, so läßt sich zweierlei feststellen. Zum einen hat die Fachdidaktik aus der umfangreichen Literatur zur Motivationspsychologie nur wenige Werke zur Diskussion herangezogen. Wenn überhaupt auf Vorgaben dieser Disziplinen zurückgegriffen wird, so i.a. auf Arbeiten aus der pädagogischen Psychologie und aus der allgemeinen Pädagogik. Fast alle Artikel beziehen sich dann auf HECKHAUSEN. Zum anderen aber findet man in der Fachdidaktik dennoch im wesentlichen alle in den erziehungswissenschaftlichen Disziplinen aufgeführten Kategorien des Motivierens angesprochen (Motivation durch Aufgabenschwierigkeit, durch Inkongruenzen, durch Erfolgserlebnisse und Bekräftigungen, durch soziale Beziehungen im Unterricht, durch Auswahl geeigneter Unterrichtsmethoden), oft allerdings in sehr vereinfachter Form.

Vergleicht man im einzelnen die Motivationsklassen aus den Grundlagenwissenschaften mit ihren Entsprechungen in der Fachdidaktik, so ist hinsichtlich einer Motivation durch Aufgabenschwierigkeit festzustellen, daß von den zahlreichen Befunden aus der Leistungsmotivationstheorie erst ein sehr geringer Teil von der Mathematikdidaktik aufgegriffen wurde.
Ergebnisse der Attribuierungstheorie sind ebenfalls erst in geringem Maße für Motivation im Mathematikunterricht bearbeitet worden. Die Ausnahme ist ein Trainingsprogramm von WITTOCH zur Ausbildung eines hohen, durch Hoffnung auf Erfolg geprägten Leistungsmotivs.

Darüber, daß Erfolgserlebnisse ein ganz besonders wirksames Mittel, oft sogar eine notwendige Maßnahme bzw. Voraussetzung für Motivation im Mathematikunterricht sind, besteht in der Fachdidaktik Konsens. Allerdings sind die Überlegungen zum Motivieren durch Erfolg dort weniger auf die entsprechenden Theorien in der *Psychologie* bezogen, als vielmehr auf Ansichten führender *Pädagogen* sowie auf einschlägige Erfahrungen aus der Unterrichts*praxis*. Mißerfolg als Motivations*auslöser* ist in der Fachdidaktik Mathematik hingegen noch gar nicht untersucht worden, Mißerfolg wird dort immer als motivations*hemmend* gesehen.

Stärker auf die Vorgaben aus Psychologie und Pädagogik gestützt findet man in der Fachdidaktik die Verhältnisse bei der Motivation durch Inkongruenzen. Es gibt in der mathematikdidaktischen Literatur Arbeiten, in denen, ausgehend von Grundlagen aus der Psychologie, verschiedene Aufgaben- und Problemstellungen

angeboten werden, die Inkongruenzen wie Zweifel, Unklarheit, Widersprüchlichkeit u.a.m. erzeugen können. Auch wird dort erörtert, *wie* mathematische Aufgaben und Probleme *dargestellt* werden sollten, damit sie motivierende kognitive Konflikte im Schüler auslösen. Man findet Aufgaben z.B. bei AWECKER, HOLE, RAUFUSS, G.SCHMIDT, bei POSAMENTIER / STEPELMAN, bei STANLEY / BEZUSKA.
Es gibt darüber hinaus nicht wenige Autoren, die zur Motivation durch Inkongruenzen zwar Hinweise und Beispiele geben , die auch die einschlägigen Begriffe benutzen, die jedoch nicht auf die Bedeutung hinweisen, die diese Begriffe in den pädagogischen Wissenschaften haben. Oft ist statt von Motivation durch Inkongruenzen auch die Rede von Motivation durch Diskrepanzen, durch kognitive Konflikte, durch Paradoxien, durch Lücken, durch Herausforderungen, durch ein "Staunen" und - oft genannt - durch Anregen der Neugier.

Überwiegend haben sich Mathematikdidaktiker mit Fragen befaßt, wie Schüler <u>von der Sache her</u> motiviert werden können. Schon ein eigentümlicher Sprachgebrauch verweist auf diese Motivationsklasse. Man spricht einmal davon, einen *Schüler* zu motivieren, oft aber auch davon, einen mathematischen *Gegenstand* zu motivieren; z.B. einen Begriff, einen Satz, u.a.m.. Darunter wird verstanden, dem Schüler zu erklären, warum gerade dieser Begriff oder jener Satz sinnvoll oder nützlich ist. Hier ist Motivierung eingeschränkt auf die Sicht einer geeigneten Begründung, Darstellung, Herleitung dieses *Gegenstandes*. Das heißt, auf Motivierung durch die *Sache*.
Unterstrichen wird die Betonung sachbezogener Motivation in der Fachdidaktik auch durch die vielen Artikel, in denen ein mathematischer Inhalt bzw. ein neuer Zugang zu einem bekannten Inhalt aufgezeigt wird, eben gerade mit der Behauptung, daß der Inhalt bzw. seine Darstellung interessant und geeignet sei, die Schüler zu *motivieren*. Die meisten Aussagen zu dieser Motivationsart sind von den Fachdidaktikern weniger durch Berufung auf psychologische und erziehungswissenschaftliche Grundlagen gewonnen worden, sie wurden vielmehr ihrer praktischen Unterrichtsarbeit direkt entnommen.

Zur Motivation durch die Sache bzw. durch den Unterrichtsgegenstand gibt es in der fachdidaktischen Literatur eine Fülle von Beispielen. Es gibt Beispiele zur Gestaltung motivierender Aufgaben, zur Konstruktion von Rechenspielen und zum Aufbau von Spielsituationen; ebenso gibt es Beispiele zu motivierenden innermathematischen wie außermathematischen Fragestellungen, zur Motivation durch Anwendung von Mathematik bei der Bewältigung von Problemen aus anderen Wissensgebieten und von lebenspraktischen Fragen sowie Beispiele von Aufgaben, die Inkongruenzen hervorrufen. Auch ohne ausdrücklich auf Motivationsfragen abzuzielen, werden in den fachdidaktischen Zeitschriften regelmäßig Anregungen zur Herleitung und Gestaltung von solchen Unterrichtsinhalten veröffentlicht, die Beispiele für die verschiedenen Arten von Sachmotivation sind.
Für die meisten dieser Beiträge mag aber wohl gelten, was WINTER zu den Schriften von POLYA anmerkt, daß dort nämlich eine hohe Motivation seitens des Lernenden schon *vorausgesetzt* wird. In fast allen Beispielen und Vorschlägen

zum Sachmotivieren wird so gut wie nie belegt, ob diese die erwarteten Motivationseffekte beim Schüler auch tatsächlich erbringen. Was hier stets fehlt, ist eine hinreichend sichere Abklärung, ob Aufgaben und Probleme, die gewiß einen *Lehrer* zu motivieren vermögen, in gleicher Weise auch auf einen *Schüler* motivierend wirken können.

Zusammenfassend darf zum Motivationsproblem für den Mathematikunterricht gesagt werden, daß die psychologische Motivationsforschung eine Reihe von Aussagen über Motivierbarkeit und Motivationsstärke in Abhängigkeit von speziellen situativen und individuellen Bedingungen liefert, die von der Fachdidaktik derzeit nur in Ansätzen berücksichtigt werden. Die Befunde aus der Psychologie und aus den pädagogischen Wissenschaften sind indessen oft in ihrer Vielschichtigkeit, in ihrer nicht immer eindeutigen Darstellung und in ihrem allgemeinen Charakter von der Art, daß sich die Umsetzung in tägliche Unterrichtspraxis schwierig gestalten kann. Die fachdidaktische Literatur hält aber ihrerseits ein reichhaltiges Aufgaben- und Unterrichtsmaterial bereit, das Motivation im Mathematikunterricht bewirken kann bzw. bewirken soll. Die *speziellen* Einsatzmöglichkeiten und die *tatsächlichen* Motivationseffekte der Vorschläge, die der Fachdidaktik entstammen, sind jedoch in weiten Teilen erst noch zu erforschen.

Zu betrachten ist jetzt, wie die Dinge in der **Geometrie** bzw. im Geometrieunterricht liegen.
Aussagen darüber, daß das Motivationsproblem im Geometrieunterricht von der Fachdidaktik anders behandelt wird als das Motivationsproblem im Mathematikunterricht generell, können nicht belegt werden. Diejenigen Artikel, die sich ausdrücklich mit Motivation im *Geometrie*unterricht befassen, geben in der Regel Beispiele dafür an, welche *Inhalte* des Geometrieunterrichts, bzw. welche *Aufbereitung* solcher Inhalte, einen Schüler motivieren könnten. Diese Geometriebeispiele können hinsichtlich ihres Motivationscharakters unter den oben genannten Kategorien subsummiert werden.
Welche Vorteile und welche Nachteile die geometrischen Inhalte in ihrer Motivationsträchtigkeit gegenüber den Inhalten aus Arithmetik und Algebra haben, ist in der Fachdidaktik noch nicht näher erörtert worden. Somit stellt sich die Motivationsproblematik im Geometrieunterricht bislang genau so dar wie die Motivationsproblematik im Mathematikunterricht allgemein. Es kann aber, von dem vorliegenden Material ausgehend, gefragt werden, ob es unter den Kategorien des Motivierens im Mathematikunterricht solche gibt, in denen *häufiger* geometrische Sachverhalte und Arbeitsmethoden auftreten als andere und in denen die Beispielbelegung verstärkt auf *Geometrie*aufgaben zurückgreift.

Bei den Motivationsmöglichkeiten, die in einem allgemeineren Sinn sowohl auf den *Schüler* wie auf die *Unterrichtssituation* bezogen sind, bei den also nicht primär sachbezogenen Motivationen, findet man unter den Ausführungen zur "Motivation durch Auswahl geeigneter Unterrichtmethoden" mehrfach spezielle

Verweise auf den Geometrieunterricht. Besonders häufig ist das der Fall bei der Erörterung von Methoden, in denen die *Selbstätigkeit* der Schüler eine dominierende Rolle spielt. Lernaktivitäten, die das *Tun* der Schüler in den Vordergrund stellen, werden von der Fachdidaktik als hervorragendes Mittel zur Motivationsbeschaffung genannt. Es wird als vorteilhaft erachtet, "wenn *der Schüler selbst aktiv* seinen Teil zum Lernprozeß beisteuern muß und kann und nicht nur rezeptiv beteiligt ist" (RAUFUSS). Von speziellem Nutzen kann es danach sein, wenn diese Aktivitäten die Form von *manuellen* Arbeiten haben. Als Beispiele dafür werden vornehmlich *Konstruktionen* in der Geometrie genannt. Weitere Beispiele für motivierende Tätigkeiten sind das Anfertigen von geometrischen Modellen (FREUDENTHAL) oder das Sortieren und Klassifizieren von strukturiertem Material, das i.a. geometrisch ausgelegt ist. HOLE vertritt die Ansicht, daß Aufgaben, die "auf handlungsgemäßem, probierendem oder zeichnerischem Wege" gelöst werden können, die Schüler eher motivieren, als Aufgaben, die in ausschließlich mündlich-verbaler oder schriftlich-symbolischer Form zu behandeln sind. Ein Zitat von HOLE macht deutlich, wie sehr *diese* Motivationskategorie für den Geometrieunterricht nutzbar zu machen wäre:

> "Die bekannte Vorliebe der Kinder für geometrische und topologische Aufgabenstellungen in der Grundschule hängt wesentlich mit der erwähnten Motivationsart zusammen. So ist in der Geometrie der Grundschule der Handlungsanteil (Zerlegen, Auslegen, Wenden, Falten, Drehen, Parallelverschieben) und in der Topologie der zeichnerische Anteil (Netze, Gebiete) besonders hoch".

In der Meinung, daß Schüler durch Methoden wie "entdeckender Unterricht", "problemorientierter Unterricht", "projektorientierter Unterricht", "problemhaltige Unterrichtsgestaltung" besonders motiviert werden können, sind Fachdidaktiker und Pädagogen einig. Interessant ist hier die Feststellung, daß die zur Erläuterung verwendeten Beispiele aus der Unterrichtspraxis dann auch zum größten Teil wieder aus dem *Geometrie*unterricht stammen (BESUDEN, WAGENSCHEIN, u.a.).
Ebenso verhält es sich mit einer anderen Motivationsklasse, der Motivation durch Einsatz von Arbeitsmitteln und Medien. Auch in diesem (noch wenig ausgearbeiteten) Gebiet werden zur Erläuterung vorrangig *geometrische* Beispiele genannt - geometrische Formen, Figuren und Modelle, und speziell auch solche, die von den Schülern selbst angefertigt werden können.

In den großen Beispielsammlungen, die man in der fachdidaktischen Literatur zur "Motivation durch die Sache" findet, gibt es besonders viele geometrische Aufgaben und Problemstellungen. Von den 16 Aufgaben, die POSAMENTIER und STEPELMAN für ihre "techniques of motivation" angeben, sind 11 dem Geometrieunterricht entnommen, also mehr als 2/3. Bei anderen Autoren ist der Anteil an Geometriebeispielen zwar nicht derart hoch, insgesamt machen geometrische Probleme etwa nur die Hälfte aller für Mathematik angegebenen Beispiele aus. Betrachtet man diese Anteile jedoch im Verhältnis der Anzahl der

Unterrichtsstunden für Geometrie zu der anderer mathematischer Disziplinen, so sieht man, daß Geometrie zum Mathematiklernen einen sehr hohen Prozentsatz an motivierenden Inhalten beisteuert.

Für die einzelnen Kategorien innerhalb sachbezogenen Motivierens (Motivation durch Spiele, Motivation durch geeignete Aufgabenauswahl und Aufgabendarbietung, Motivation durch außermathematische Problemstellungen, Motivation durch innermathematische Problemstellungen, Motivation durch Inkongruenzen) kann man aber durchaus Unterschiede im Verhältnis von Geometrieaufgaben zu anderen Aufgaben feststellen.

Relativ wenig Geometrisches findet man in der Gruppe "Motivation durch Spiele", soweit diese in der Fachdidaktik beschrieben werden. Bei den dort diskutierten Spielen überwiegen solche, die der Einübung von Kopfrechnen und Rechenverfahren dienen.

Zu der Gruppe "Motivation durch geeignete Aufgabenauswahl und Aufgabendarbietung" gibt es ebenfalls nicht übermäßig viele Beispiele aus dem Geometrieunterricht; einige findet man bei den sog. "offenen" Aufgaben. *Offene* Aufgaben werden insofern als besonders motivationsfördernd erachtet, als sie individuell wählbare Schwierigkeitsgrade zulassen und weil sie die Neugier von Schülern anzuregen vermögen.

Fast ausschließlich der Geometrie entnommen sind Motivationsaufgaben, in denen etwas *bewiesen* werden soll. Das mag daran liegen, daß Geometrie ohnehin eine dominierende Rolle spielt, wenn es um das *Beweisen* im Mathematikunterricht geht. ZIEBEGK gibt z.B. sieben verschiedene Arten an, wie man Schüler dazu motivieren könnte, einen Beweis zu suchen. Er verdeutlicht das an Beispielen aus dem Geometrieunterricht der Klassen 7 und 8. Als eine der Möglichkeiten zur Beweismotivierung schlagen ZIEBEGK (und auch WALSCH) vor, Aufgaben *so* als Fragen zu stellen, daß sie Zweifel wecken und zu Vermutungen führen, die dann kontrolliert werden *müssen*.

Zur Gruppe "Motivation durch außermathematische Problemstellungen" ist folgendes zu sagen. Hier werden solche Motivationen aufgeführt, die von den *Anwendungen* der Mathematik ausgehen. *Geometrische* Problemstellungen sind als Beispiele für diese Motivationsart auch hier häufig zu finden, wenn auch nicht in so großer Anzahl, wie das bei den innermathematischen Fragestellungen und bei den Inkongruenzen erzeugenden Aufgaben der Fall ist.
Bei den meisten Anwendungsaufgaben, die zum Motivieren herangezogen werden, geht es um das Rechnen mit Geldbeträgen. Doch auch diese werden mit *geometrischen* Übungen verbunden, etwa bei der Frage, wie teuer neue Tapeten für ein Kinderzimmer sind, u.a.m. . Geometrie-Aufgaben findet man weiter in den Anwendungsbereichen Volumenberechnung, Flächenberechnung, Flächenmessung, bei Perspektiven und Projektionen. Ein besonderer Motivationseffekt wird darunter solchen Aufgaben zugeschrieben, die mit *historischen* Problemstellungen gekoppelt sind. Nichtmathematische Fachgebiete können ebenfalls Motivationen für den Geometrieunterricht liefern, z.B. für die Anwendung von Tri-

gonometrie, analytischer Geometrie und Vektorrechnung. So etwa in der Physik und in anderen Wissenschaften.
Daß die Vorschläge zur "Motivation durch Anwendungen" i.a. nicht problemlos gesehen werden können, zeigen die vielfältigen Diskussionen in der Fachdidaktik über Sachrechnen, Textaufgaben und über die "Echtheit" von Anwendungsproblemen. Viele Anwendungsaufgaben, die einige Autoren für durchaus motivierend halten, sind in den Augen anderer Didaktiker ungeeignet zur Motivationsauslösung.

Zu betrachten ist jetzt die Gruppe "Motivation durch innermathematische Problemstellungen". Nach PIETZSCH liegt innermathematische Motivation dann vor, wenn ein "rein mathematisches Problem aus dem Aufbau der Mathematik heraus, durch ihre Denk- und Arbeitsweise" motiviert wird. PIETZSCH ordnet die innermathematischen Motivationsmöglichkeiten nach diesen Aspekten:

1. Notwendigkeit, Zweckmäßigkeit und Erleichterung
2. Vollständigkeit und Systematik
3. Analogie
4. Verallgemeinerung
5. Umkehrung einer Fragestellung
6. Suchen von Zusammenhängen und Abhängigkeiten

Seine Beispiele zur Erläuterung dieser Aspekte innermathematischen Motivierens stammen überwiegend aus dem *Geometrie*unterricht.
Zu den innermathematischen Motivierungen zählen auch solche, die durch Vermitteln von "eindrucksvollen Phänomenen" in der Mathematik zustande kommen können, d.h. auch solche Motivationen, die z.B. durch "Freude am Ästhetischen" ausgelöst werden. Für diese Motivationsart sind geometrische Inhalte offenbar in ganz besonderer Weise geeignet. Einerseits können im Geometrieunterricht ganze Unterrichts*einheiten* motiviert werden durch das "ästhetische Erlebnis komplexer Figurationen" (Parkettierungen, Symmetrien, regelmäßige Polygone und Polyeder, Zentralperspektiven) andererseits können Motivationen auch von *einzelnen* Sachsituationen ausgehen, z.B. von sauber ausgeführten und exakten Konstruktionen oder von eleganten Beweisen vermöge geschickt gewählter Hilfslinien (G.SCHMIDT).
Die Ansicht, daß "schöne Darstellungen" motivieren, ist relativ häufig in der fachdidaktischen Literatur anzutreffen. Bei der Anwendung dieser sehr emotionsgebundenen Art des Motivierens scheint indessen besondere Sorgfalt vonnöten zu sein. Sein eigenes ästhetisches Empfinden bezüglich mathematischer Sachverhalte darf einen Lehrer nicht zu der möglicherweise falschen Hoffnung verleiten, daß auch seine Schüler Freude an diesen Inhalten und an der Beschäftigung mit ihnen haben könnten.

In der Gruppe "Motivation durch Inkongruenzen" findet man Geometrieaufgaben zur Beispielbelegung häufiger verwendet als in allen anderen Arten sachbezogenen

Motivierens. Interessante geometrische Problemstellungen, die Beispiele für die verschiedenen Typen von Inkongruenzen sind, findet man u.a. bei AWECKER, G.SCHMIDT und POSAMENTIER/STEPELMAN.

Da es gerade in dieser großen Motivationskategorie die deutlichsten Übereinstimmungen zwischen den Ergebnissen der psychologischen bzw. pädagogischen Motivationsforschung und den fachdidaktischen Motivierungsvorschlägen gibt, kann wohl mit Recht vermutet werden, daß man im Geometrieunterricht besonders gute Möglichkeiten hat, Schüler für Mathematisches zu motivieren.

Literatur:

Atkinson, J.W. Motivational determinants of risk-taking behavior. Psychological Review, 1957, S. 359 - 372

Atkinson, J.W. An introduction to motivation. Princeton N.J. 1964

Atkinson, J.W.; Raynor, J.O. (Eds.) Motivation and achievement. Washington, D.C. 1974

Awecker, P. Motivierende Einstiege im Mathematikunterricht. Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wien 1981, OeMG Didaktik-Reihe Nr. 7, S. 1 - 19

Berlyne, D.E. Conflict and information-theory variables as determinants of human perceptual curiosity. Journal of Experimental Psychology, 1957, S. 399 - 404

Berlyne, D.E. The influence of complexity and novelty in visual figures on orienting responses. Journal of Experimental Psychology, 1958, S. 289 - 296

Berlyne, D.E. Structure and direction in thinking. New York 1965

Berlyne, D.E. Curiosity and exploration. Science, 1966 a, S. 25 - 33

Berlyne, D.E. Notes on intrinsic motivation and intrinsic reward in relation to instruction. In: Bruner, J.S.: Learning about learning. Washington 1966. S. 105 - 110

Berlyne, D.E. Konflikt, Erregung, Neugier. Stuttgart 1974

Besuden, H. Motivation und operatives Prinzip im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I. Beiträge zum Mathematikunterricht, 1980, S. 36 - 40

Besuden H. Motivierung im Mathematikunterricht durch problemhaltige Unterrichtsgestaltung. Der Mathematikunterricht, 1985, S. 75 - 81

Freudenthal, H. Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht. München-Wien 1978

Heckhausen, H. Förderung der Lernmotivierung und der intellektuellen Tüchtigkeit. In: Roth, H.: Begabung und Lernen. Stuttgart 1968. S. 193 - 228

Herber, H.-J. Motivationstheorie und pädagogische Praxis. Stuttgart 1979

Hole, V. Erfolgreicher Mathematikunterricht. Freiburg 1973

Hole, V. Motivation im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Lauter, J.: Der Mathematikunterricht in der Grundschule. Donauwörth 1976. S. 29 - 64

Pietzsch, G. Probleme und Möglichkeiten der Motivierung im Mathematikunterricht. Mathematik in der Schule, 1973, S. 404 - 413

Posamentier, A.S.; Stepelman, J. Teaching secondary school mathematics. Techniques and enrichment units. Columbus, OH 1981

Raufuss, D. Planung des Unterrichts in Mathematik und Physik auf der Sekundarstufe. Frankfurt 1980

Schmidt G. (Hrsg.): Methoden des Mathematikunterrichts in Stichworten und Beispielen 7/8. Braunschweig 1981

Schmidt, G. Innermathematische Motivation. Der Mathematikunterricht, 1985, S. 60 - 74

Stanley, J.; Bezuska, S.J. Innovative modes for modern moods. In: Williams, D., Crawford, H. (Hrsg.): Mathematics theory into practice. Australian Association of Mathematics Teachers, Macquarie. Canberra, 1980, S. 368 - 380

Wagenschein, M. Zum Problem des genetischen Lernens. Zeitschrift für Pädagogik, 1966, S. 305 - 330

Wagenschein, M. Entdeckung der Axiomatik. Der Mathematikunterricht, 1974, S. 52 - 70

Walsch, W. Zum Beweisen im Mathematikunterricht. Berlin 1975

Weiner, B. Theories of motivation: From mechanism to cognition. Chicago 1972

Weiner, B. The effects of unsatisfield achievement motivation on persistence and subsequent performance. In: Atkinson, J.W.; Raynor, J.O. 1974, S. 347 - 357

Weiner, B. Motivationspsychologie. Weinheim-Basel 1984

Weiner, B.; Meyer, W.U. Wirkungen von Erfolg und Mißerfolg auf die Leistung. Stuttgart 1975

Winter, H. Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. Journal für Mathematik-Didaktik, 1983, S. 59 - 95

Wittoch, M. Anregungen zur Motivation in mathematischen Lernprozessen. Fernuniversität-Gesamthochschule Hagen 1981

Wittoch, M. Motivation im Mathematikunterricht lernschwacher Schüler. Der Mathematikunterricht, 1985, S. 93 - 108

Zbick, E.M. Die Rolle des Motivationsproblems in der Mathematikdidaktik. Dissertation, Duisburg 1988.

Ziebegk, G. Zur Problematik von Motivation und Beweis im Geometrieunterricht der Klassen 7 und 8. In: Heft 7 der Schriften des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e.V., 1980, S. 75 - 80

Andreas Ambrus /Budapest,Ungarn/

GEOMETRIEUNTERRICHT IN UNGARN

Abstract

Einige Konzekvenzen des ungarischen Schulsystems.Die allgemeine Bedingungen des Geometrieunterrichts in Ungarn. Haupttendenzen im ungarischen Geometrieunterricht:mengentheoretische Auffassung,parallelle Behandlung der Planiemetrie und Raumgeometrie,Vektorlinie,geometrische Transformationen,Darstellende Geometrie und Zeichnenverfahren, Geometrie als Problemlösefeld,Deduktion und axiomatische Aufbau,praktische Anwendungen.

Vorbemerkungen

1.Seit 40 Jahren haben wir unseres heutiges Schulsystem: Kl.1-8.Allgemeinbildende Schule für alle Schüler;Kl.9-12 Mittelschule /Gymnasium,Fachmittelschule,Berufsschule/. Heute sehen wir schon,dass dieses System nicht effektiv ist.Gemeinsamer Lehrplan für alle hat zum Ergebnis geführt die Lehrmaterialen sind gut für die begabten Schüler,aber sie sind schwer für die mittleren und schwchen Schüler. Auch in der sowjetischen methodischen Literatur trifft man sich heute schon mit der Meinung,dass dieses Modell: einheitlicher Lehrplan für alle-verändert werden muss.In der Sowjetunion wollen drei Linien im Mathematikunterricht einführen:I.Für die Schüler,die für ihr späteres Leben keine extra Mathematik benötigen.II.Für die Schüler,die für ihren Beruf Mathematik benötigen.III.Für die Schüler die Fachmathematiker wollen werden.Sie sind noch bei der Anfangsphase,es ist noch nicht entschieden ob getrennte Lehrpläne,Lehrbücher,oder ein Lehrplan bzw.Lehrbuch mit Ergänzungen sollte verwendet werden.Die oben Gesagten beziehen sich für die Klassen 6-10.

2. In den letzten 40 Jahren herrschte den ungarischen Mathematikunterricht-als die ganze Gesellschaft-die übermässigte Zentralisiertheit.Die Richtung "Von Oben nach Unten" herrschte das ganze Leben.Was einige Mathematiker entschieden haben,das probierten die Lehrer realisieren. Die Athmosphere war solche,dass die einfachen Lehrer

Angst hatten ihre Erfahrungen,ihre Gegenmeinungen mitteilen.Die Situation ist auch heute noch nicht befriedigend, obwohl wir sehen schon,dass dieses Modell nicht funktioniert.Aber die Demokratie entwickelt sich sehr langsam. Ein grosses Problem ist in Ungarn,dass sehr wenig-cc.10-Mathematikdidaktiker sind.

3.Etwas allgemeines über den Geometrieunterricht:eine Konzekvenz unseres Schulsystems ist,dass viele Sachen im wesentlichen zweimal unterrichten wir.Z.B.:Satz von Thales Satz von Pythagoras unterrichten wir in den Klassen 7-8 bzw. in den Klassen I.-II. der Mittelschule,zwar auf gleichem Niveau.Es gibt keine Hauptlinie für Klassen 1-12,die Allgemeinbildende Schule ist ganz getrennt von der Mittelschule.Die Reformbewegungen in den Klassen 1-8 folgte nicht eine konzekvente,adequate Änderung in der Mittelschule.Die geometrischen Transformationen sind z.B. in den Klassen 7-8 auf höherem Niveau ausgearbeitet als in den Klassen I-II der Mittelschule.

Jetzt planen wir das achtjährige Gymnasium neu einzuführen. Vor dem zweiten Weltkrieg hatten wir es schon,hoffentlich können wir damit viele Probleme lösen.

Einige konkrete Bedingungen des Geometrieunterrichts:im allgemeinen kann man sagen,dass die Geometrie einen befriedigenden Platz in unserem Mathematikunterricht hat.In den Klassen 5-8 cc. 40% der Stunden sind für die Geometrie. /55-60 Stunden pro Jahr/ In den Klassen I-II der Mittelschule 28-30% /40-45 Stunden pro Jahr/.

Zwischen Prüfungsaufgaben /Abitur,Aufnahmeprüfungen,Math. Olympiaden/ sind immer mehrere geometrische Aufgaben.

Ich muss aufrichtig sagen,dass die Geometrie zwischen den Schülern bzw. den Mathematik-Lehrerstudenten nicht populär ist.Ich frage immer meine Studenten darüber,was ihre Stellung zur Geometrie ist,und erhalte ich am meisten das Ergebnis:1-2 Studenten aus 15-20 mögen die Geometrie. Leider ist es ein Teufelkreis:die Studenten mögen die Geometrie nicht,sie als Lehrer werden sie auch nicht gern

unterrichten,ihre Schüler werden ganz natürlich die Geometrie auch nicht lieben.

Haupttendenzen im ungarischen Geometrieunterricht

1.Die mengentheoretische Auffassung

Die Reformbewegungen des Mathematikunterrichts kommen immer etwas später in die sozialistischen Länder,und bleiben leider weiter als führende Ideen dort.Das betrifft sich auch die mengentheoretische Auffassung.In dem ungarischen Mathematiklehrplan für Klasse I. der Mittelschule gibt es auch noch heute ein Thema: "Mengen".Das Problem liegt darin,dass viele Lehrer Mengentheorie unterrichten.Die übermässigte Symbolenverwendung,die strenge Mengensprache usw sind besonders für die mittleren und schwachen Schüler sehr abtrakt,formal,schwer.Sie sollen auf die äussere,formale Dingen achten,und das inhaltliche Wesen fällt aus.Die mengentheoretische Auffassung verursacht viele Missverständnisse auch zwischen den Lehrern.Vor einigen Monaten hat mich eine junge Mathematiklehrerin gebeten die Umkehrung des Thalessatzes zu erklären.Im Lehrbuch steht als Thalessatz folgendes:"Die Menge der Punkte,aus denen eine gegebene Strecke im Rechtwinkel sehbar ist,ein Kreis,dessen Durchmesser die vorgegebene Strecke ist."Keiner von ihren älteren Kollegen konnte das Problem lösen.Das Problem liegt darin,dass in der obigen Formulierung Satz und Umkehrung beide formuliert sind.Man soll den Schülern klarmachen,dass diese Formulierung im Sinne "dann und nur dann" bzw. "notwendige und hinreichende Bedingung" verstanden werden soll.Für das Bilden die Unkehrung eines Satzes ist es günstiger den Satz im Form "Wenn...,dann.." formulieren,besonders in der Anfangsphase.
Natürlich sind auch im Geometrieunterricht solche Gebieten wo die Mengensprache gut anwendbar ist./Systematisieren, geometrische Konstruktionsaufgaben/

2.Eine schöne,alte Idee im ungarischen Geometrieunterricht ist,<u>die parallelle Behandlung der Planiemetrie und Raumgeometrie.</u>Die offiziellen Lehrpläne schlagen das vor.

Was zeigt aber die Wirklichkeit?Wegen zeitlichen Gründen auch vernachlässigen die Lehrer die raumgeometrischen Fragen.Eine Konzekvenz der parallellen Behandlung:es fehlt eine systematische Aufbau der Raumgeometrie.
Der Raumgeometrieunterricht braucht viel Zeit:Körpernetze, Modelle bauen,experimentieren usw.Ausserdem ist es sehr schwer das Wissen und Können der Schüler in diesen Fragen kontrollieren.Unsere Lehrer wollen alles kontrollieren,womit sie auf den Stunden beschäftigten sich,und das können sie bei den planiemetrischen Fragen leichter machen.
Ein Beispiel darauf welche Konzekvenze hat die parallelle Behandlung:bei den Flächeninhalts-bzw. Volumenberechnungsaufgaben haben unserer Schüler grosse Schwierigkeiten mit dem Kantenwinkel bzw. Flächenwinkel,weil für ihre Behandlung sehr wenig Zeit zur Verfügung stand,die Schüler haben sie bald vergessen.
Es ist klar:man darf die Planiemetrie nicht getrennt von dem Raum unterrichten.Aber wie kann man die Raumgeometrie effektiv unterrichten,das ist für uns noch eine offene Frage.Interessant ist zu bemerken,dass in der Sowjetunion Polen,Rumänien,Bulgarien,Czechoslowakei,DDR die Raumgeometrie von der Planiemetrie getrennt unterrichtet wird.

3. Die Vektorlinie

Es ist eine offizielle Meinung in Ungarn,dass man die Geometrie immer moderner unterrichten soll.Das bedeutet:neben der mengentheoretischen Auffassung auch die Vektoren in die Vordergrund gestellt werden sollen.Das Ergebnis:auch dort,wo die synthetische Behandlung viel einfacher wäre, beinhalten die offiziellen Lehrmaterialen eine vektorielle Aufarbeitung.
Beispiele:
1.Aufgabe:Im welchen Verhältnis teilt die Strecke BK die Diagonale AC des Parallelogramms ABCD,wenn gilt:
AK:AD= 1:n ? /s. abb. 1 !/
Vektorielle Lösung:es seien $\vec{DC} = \underline{b}$, $\vec{DA} = \underline{a}$, $\vec{AP} = \alpha\vec{AC}$
I. $\vec{AP} = \alpha \cdot AC = \alpha/\underline{b} - \underline{a}/ = \alpha\underline{b} - \alpha\underline{a}$

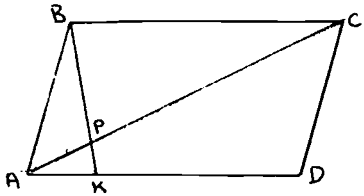


Abb. 1

II. $\vec{AP} = \vec{AK} + \vec{KP} = -\frac{1}{n}\underline{a} + \alpha\vec{KB} = -\frac{1}{n}\underline{a} + /\frac{1}{n}\underline{a} + \underline{b}/ =$

$= \frac{\alpha-1}{n}\cdot\underline{a} + \alpha\cdot\underline{b}$ $\quad$ /$\vec{KP} = \alpha\vec{KB}$, weil APK$\triangle\sim$BPC$\triangle$ /

Aus der Eindeutigkeit der Zerlegung eines Vektors folgt

$$\frac{\alpha-1}{n} = -\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{n+1}$$

Eine elementare Lösung kann man mit Hilfe der Ähnlichkeit von Dreiecken -was die vektorielle Lösung verwendet auch-leicht finden.

2.Aufgabe:$ABCDA_1B_1C_1D_1$ ein Würfel./s. Abb.2 /Im welchen Verhältnis teilt die Ebene BPQ /P ist der Mittelpunkt des Quadrates ADD_1A_1;Q ist der Mittelpunkt des Quadrates $A_1B_1C_1D_1$/ die Kante A_1D_1?

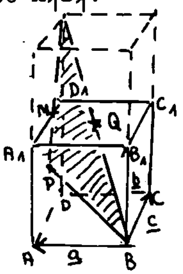


Abb. 2

Vektorielle Lösung: Verwenden wir die Zeichnungen der Figur!

$\vec{BM} = \underline{a} + \underline{b} + \lambda\underline{c}$

$\vec{BM} = \alpha\vec{BP} + \beta\vec{BQ} = \alpha\cdot/\underline{a} + \frac{\underline{b}+\underline{c}}{2}/ + \beta\cdot/\frac{\underline{a}}{2} + \underline{b} + \frac{\underline{c}}{2}/$

$\underline{a} + \underline{b} + \lambda\underline{c} = \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\cdot\underline{a} + \left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\underline{b} + \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\underline{c}$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\alpha + \frac{\beta}{2} = 1\\ \frac{\alpha}{2} + \beta = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3},\ \beta = \frac{2}{3}\\ \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \lambda\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

$A_1M:MD_1 = 2$

Eine einfachere,elementare Lösung kann man aus der Figur

ablesen.
Hauptproblem sehe ich darin,dass in Ungarn der mathematische Vektorbegriff ganz getrennt von dem physikalischen Vektorbegriff ist.Die meisten ungarischen Schüler arbeiten nur formal mit dem abstrakten Begriff.
Die Trigonometrie und die Analytische Geometrie sind vektoriell aufgebaut.

4.Geometrische Transformationen
Es ist eine verbreitete Meinung in Ungarn,dass man die geometrischen Transformationen ins Zentrum des Geometrieunterrichts stellen soll.Die Aufbau:Drehung um einer Gerade im Raum /Ablesen anschaulich evidente Eigenschaften/$\Rightarrow$Spezialfall:Drehwinkel 180°,Spiegelung an einer Gerade in der Ebene $\Rightarrow$ Punktspiegelung $\Rightarrow$ Drehung um einen Punkt $\Rightarrow$ Verschiebung.
Die Aufbau des Geometriestoffes ist gemischt,es gibt keine einheitliche,sogenannte Transformationslinie.Bei den beweisen der Sätze oft kommen die Kongrunzsätze der Dreiecke vor.Bei den Aufgabenlösungen befürworten die ungarischen Schüler bzw. Studenten die Kongruenzsätze,sehr selten trifft man sich mit einer Lösung durch geometrische Transformation.

5. Dartsellende Geometrie,Zeichnenverfahren als Lehrstoff fehlen aus unserem mathematischen Lehrplan.Früher hatten wir Darstellende Geometrie,aber nach der Wochenstundenzahlverminderungen hat das Ministerium sie als eine trennbare Einheit weglassen.Kein Zufall ist,dass unsere Schüler sehr schwer ein Körper zeichnen können.

6.Geometrie als Problemlösefeld
Das Problemlösen steht im Zentrum in dem ungarischen Mathematikunterricht.Wir haben viele Aufgabensammlungen für die Schüler,es gibt eine Lehrbuchserie,die nur Aufgaben enthält.Das Bildungsministerium hat eine Aufgabensammlung mit 4000 Aufgaben ausgegeben,aus diesen Aufgaben wählen die Abituraufgaben aus.Diese Aufgabensammlung steht zur Verfügung sowohl für die Lehrer als auch für die Schüler.
Leider tranieren die meisten Lehrer nur diese Aufgaben

schon von Klasse I. der Mittelschule,die konzekvente,systematische,theoretische Aufbau so fällt aus."Unsere Arbeit bewerten nach den Prüfungsergebnissen,wir müssen deshalb auf die Markt produzieren" meinen viele Lehrer.Man kann sagen:die Prüfungsorientheit herrscht unseren Geometrieunterricht.

Es ist eine alte Tradition in Ungarn,dass die Lehrer oft schöne,komplexere Aufgaben auf den Mathematikstunden stellen,dere Lösung eine schöne,eigene Idee braucht.Schon in der Klasse 5 stellen die Lehrer viele solche Aufgaben,was mögen die Schüler,aber die Übungsaufgaben wollen sie nicht gern lösen,diese sind für sie langweilig.Weil in einer Klasse durchschnittlich 35 Schüler sind,die begabten Schüler können die schönen Aufgaben lösen,aber die mittleren und schwachen Schüler bleiben in Hintergrund.Theoretisch wissen wir gut,dass diese Probleme mit dem differenzierten Unterricht gelöst werden können,aber diese Methode funktioniert bei uns noch nicht effektiv.

Ein anderes Problem ist: viele Lehrer meinen,dass solche Begriffe wie z.B. Winkel zweier Ebene,Winkel einer Gerade und einer Ebene in komplexener Situationen geübt werden sollen,sie brauchen keine extra Übungen.Ich habe schon erwähnt wie viele Probleme haben die mittleren und schwachen Schüler damit.

Eine verbreitete Meinung ist zwischen unseren Lehrer,dass beim Problemlösen das Finden der Lösungsidee das Wichtigste ist.Leider fehlt die gründliche Analyse am Beginn der Problemlösung.Besonders wichtig wäre das Bewusstmachen der verwendeten Lösungsideen,Lösungsstrategien.Viele Lehrer lassen viele Aufgaben lösen,aber die oben erwähnten Tätigkeiten fehlen aus ihrer Arbeit.

Unsere Schüler -das ist eine konzekvente Folgerung-halten nur als wichtig die Lösungsidee finden,das Beschreiben, das Ausarbeiten der Lösung ist schon langweilig für sie. Dieses Verhalten ist typisch für die ungarischen Leute. Einmal hat der ungarische Ministerpräsident gesagt:"Wir

haben immer schöne,gute Ideen,es wäre wünscheswert einmal einige dieser Ideen auch realisieren,verwirklichen".Meiner Meinung nach,wir müssen grösseres Gewicht auf die Erziehung legen./Willenskraft,Ausdauer usw./

7.Deduktion,axiomatische Aufbau

Es ist eine einheitliche Meinung in Ungarn,dass eine axiomatische Aufbau der Geometrie nicht relevant für die Mittelschule ist.Interessant ist es zu bemerken,dass in der Lehrerausbildung an der Eötvös Loránd Universität Budapest die axiomatische Aufbau der Geometrie nur im IV.Studienjahr behandelt wird.

Es fehlt eine klare,sehbare logische Aufbau der Schulgeometrie in Ungarn.Viele Lehrer meinen,dass der Geometrieunterricht die logischen Fähigkeiten der Schüler gut entwickelt,aber fehlt das Hervorheben,das Bewusstmachen der einzelnen,verwendeten logischen Elementen.Viele Schüler sind unsicher im Zusammenhang mit der logischen Fragen.

Einige Beispiele aus einem Schüler-Test:

Negation der Konjunktion:"Das Quadrat ist ein axialsymmetrische und zentralsymmetrische Figur".Aus 250 Schülern waren nur zwei richtige Lösungen.Negation der Implikation: "Wenn ein Viereck ein Drachenviereck ist,dann seine Diagonalen halbieren sich einander." "Wenn in zwei Dreiecken zwei-zwei Winkel gleich sind,dann sind diese Dreiecke ähnlich."Kein Schüler hat richtige Lösung gegeben,obwohl die befragten Schüler aus einer Übungsschule der Eötvös Lóránd Universität waren,also bessere sind als die durchschnittlichen Schüler in Ungarn.

Um unsere Situation besser zu verstehen,möchte ich einige Meinungen in dieser Frage zitieren.Eine Lehrbuchautorin: "Für Klasse I. des Gymnasiums /14 Jahre/ ist noch nicht Ziel die scharfe Trennung der Begriffe und Sätze voneinander,die Abgrenzung der bewiesenen bzw. von der Anschauung ausgenommenen Kenntnissen."

Ein erfahrener Lehrer:"Wir verweisen oft darauf,dass die Schüler die Beweisen nicht beanspruchen.Warscheinlich werden sie sie niemals beanspruchen,wenn wir so gewöhnen sie.

Mit meinen Kollegen /mehr als 30 Jahre Erfahrungen/ sind wir darauf angekommen,dass das Hauptproblem seit langem für die Schüler das bedeutet,dass sie nicht wissen was womit zu begründen.Sie fühlen keinen Unterschied zwischen von sich selbst gebildeten und vom Lehrer "ad hoc" gegebenen Axiomen Die offiziellen Lösungshinweise illustrieren schön die oben Gesagten.Die nächste Aufgabe war eine Aufnahmeprüfungsaufgabe in Ungarn im Jahre 1986: "Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Schnittfigur von ABCDO Pyramid mit der Ebene ABF! /F ist der Mittelpunkt der Kante CO /Die Kanten des Pyramids sind alle gleich./h/ /Siehe Abb. 3!/

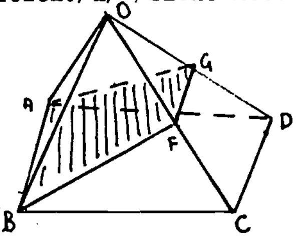


Abb. 3

Offizielle Lösungshinweis:"Verwenden wir die Bezeichnungen der Figur!Die Mittellinie FG des regelmässigen Dreiecks CDO ist parallel zur Kante AB auch,deshalb die Schnittfigur ein Trapez ist."

Warum gilt das,warum geht die Schnittebene durch die Mittellinie des Dreiecks DCO,das ist keine Frage,darüber redet der Lösungshinweis nichts.Solche Schritte,solche Sprünge sind zu gross für die mittleren und schwachen Schüler. Leider befolgen die meisten Lehrer solche Muster in ihrem Unterricht.

Man sollte einmal die Frage aufwerfen:Wie detailliert sollen die Lösungen,die Beweisen dargestellt werden?

Leider ist das Beschreiben,das Fixieren einer Lösung,eines Beweises kein Thema in unserer methodischen Literatur.In der ostdeutschen methodischen Literatur trifft man sich oft mit den sogenannten Tafelbildern,die Muster sind für die Lehrer.Bei uns sagt man:das ist eine Nebenfrage,das ist die Sache des Lehrers.

8.Praktische Anwendungen

Meiner Meinung nach ist das schwierigste Problem in unserem Geometrieunterricht die Vernachlässigung der praktischen Anwendungen.Ich möchte das mit den nächsten Daten bestätigen:

Lehrbuch /Klasse/	Anzahl der geometrischen Aufgaben	Anzahl der Aufgaben mit praktischer Art
5	115	15
6	122	1
7	280	10
8	130	20
I.Gymn.	213	3
II.Gymn.	215	3
I.Fchms.	164	4
II.Fachms.	110	-
I.Gymn. /neu/	104	-

Viele führenden Leute meinen in Ungarn:man soll reine,prezise Mathematik lehren,die Frage der Anwendungen der Mathematik ist die Aufgabe des Physik-,Chemie-,bzw. Biologieunterrichts.Als eine wichtige Ursache halten sie:sehr schwer solche echte,realistische praktische Aufgaben stellen,die für die meisten Schüler verstehbar,lösbar sind.
Zur Lösung dieses Problems brauchen wir Hilfe.Ich halte die Bücher von Wittmann und Bender sehr nützlich für den Geometrieunterricht auch - Wittmann:Elementargeometrie und Wirklichkeit,Bender:Operativ Genese der Geometrie -aber es wäre schön für uns auch solche Lehrbücher sehen bzw. haben die viele,schöne praktischen Aufgaben enthalten.Zum Beispiel die DDR-Mathematik-Lehrbuchserie enthält schöne praktische Aufgaben.
Das sind die Hauptprobleme im ungarischen Geometrieunterricht.Mein Bericht war ziemlich kritisch,ich meine wir müssen das einseitige "Schönzeigen" aufhören und die Wirklichkeit aufrichtig demonstrieren.

Literatur

Brown,G.R.:Making Geometry a Personal and Inventive Experience.Mathematics Teacher,September 1982.P.442-446
Hoffer,A.:Geometry is more than Proof.Mathematics Teacher January 1981.
Mathematik Lehrbuch Kl. 5,6,7,8.Tankönyvkiadó Budapest, 1981.
Mathematik LB.Kl.I,II,III,IV.des Gymnasiums./Dr Korányi/ Tankönyvkiadó Budapest,1982.
Mathematik LB.Kl.I.des Gymnasiums /Hajnal/.Tankönyvkiadó Budapest,1988.
Mathematik LB für Fachmittelschulen.KL.I,II./Czapáry/ Tankönyvkiadó Budapest,1979.
Mathematik Unterrichtshilfen Kl.I,II./Dr Korányi/.Tankönyvkiadó 1981.
Mathematik UH. Kl. III,IV.Tankönyvkiadó Budapest,1985. /Dr Korányi/
Mathematik UH./Czapáry/Kl.I,II.der Fachmittelschulen.Tankönyvkiadó Budapest,1984.
Mathematik Lehrplan Kl. 5,6,7,8.OPI Budapest,1978.
Mathematik LP. für das Gymnasium Kl.I,II,III,IV.OPI Budapest,1978.
Mathematik LP für fakultative Kursen A.OPI Budapest,1978.
Mathematik LP für fakultative Kursen B.OPI Budapest,1978.
Mathematik LP für Fachmittelschulen.OPI Budapest,1978.
Pehkonen,E.:Entwicklung des Geometrieunterrichts in Finnland innerhalb der letzten zwanzig Jahre.Mathematik Didaktik, 6.117 /1983/.

Andreas Ambrus /Budapest,Ungarn/

INDIREKTE DENKWEISEN IM GEOMETRIEUNTERRICHT

Abstract

Haben die indirekten Überlegungen einen gerechten Platz im Mathematikunterricht?Die Praxis des Mathematikunterrichts braucht einen umfassenden,verwendbaren Beweisbegriff.Indirekte Begründen,Argumentationen und Beweisen nach dem System von W.Walsch mit geometrischen Beispielen. Einige wichtigsten Ergebnisse eines Schüler- bzw. Lehrerinterviews im Zusammenhang indirekter Überlegungen.

Warum sind indirekte Überlegungen wichtig im Mathematikunterricht?

Kolmogorow schlägt in seinem Buch "Mathematik als Wissenschaft und Beruf" folgende Strategie zum Problemlösen vor: "Betrachte das Problem aus verschiedenen Seiten.Es soll die Hypothese oder ihre Negation bewiesen werden.Wenn der Beweis der Hypothese gelingt nicht,man soll die Negation der Hypothese untersuchen,also z.B. ein Gegenbeispiel finden.Danach soll man wieder zur Hypothese zurückkehren.Dieses duales Sehen ist sehr wichtig beim Problemlösen.Satz beweisen bzw. den Satz mit einem Gegenbeispiel widerlegen.
G. Polya nennt Reductio ad Absurdum als ein Mittel der Entdeckung.Wenn die anderen Mittel führen nicht zum Ergebnis,kann diese Methode helfen.
Aber Polya schlägt vor:wenn wir einen indirekten Beweis gefunden haben,probieren wir ihn zum direkten Beweis umformen.Er mag nicht sehr die indirekten Beweisen.
D.Solow hält es als sehr wichtig die einzelnen Beweistechniken mit den Schülern bekanntmachen.Er schreibt in seinem Buch "How to read and do proofs?" :"With the forward-backward method you only assume that A is true,while in the contradiction method you can assume that both A and not B are true.Thus you get two statements from wich to reason forward instead of just one."

Indirekte Argumentieren,Begründen und Beweisen mit geometrischen Beispielen

In der internationalen methodischen Fachliteratur finden wir keine einheitliche Meinung darüber, welche Schlussweisen zu den indirekten Beweisen gezählt werden sollen. Ein Streitspunkt ist z.B. die Kontraposition. Roberti hält die Kontraposition als eine der indirekten Methoden, aber z.B. Henry van Engen zählt sie nicht zur indirekten Methoden. Im folgenden möchte ich einen für den Unterricht brauchbaren, umfassenden Beweisbegriff vorstellen. Eine solche Auffassung finden wir in der Studie von W.Walsch und E.Goldberg. Ich will die indirekten Methoden-indirektes Argumentieren, Begründen und Beweisen- in das System von Walsch einordnen. Es erscheint sinnvoll folgende Tätigkeiten den indirekten Argumentieren, Begründen, Beweisen zuzuordnen.

1. Nachweis der Wahrheit oder Falschheit von Aussagen über einzelne Objekte durch direktes Überprüfen.

2. Nachweis der Wahrheit von Existenzaussagen durch Angabe eines Beispiels. Indirekte Überlegung: man zeigt, dass die Nichtexistenz unmöglich ist. Beispiel: Dirichlet Prinzip

Aufgabe: Ein regelmässiges Dreieck und ein Quadrat seien in einen Kreis eingeschrieben. Zu beweisen: es gibt zwischen den zustandekommenen Bogen solche, die höchstens $\frac{\pi}{12}$ Grösse hat.

Seien A,B,C die Eckpunkte des Dreiecks. /s.Abb. 1 !/ Sie teilen den Kreisbogen auf Bogen je $\frac{2\pi}{3}$ Grösse. Aus vier Quadratpunkten müssen zwei auf $\widehat{AB}$ oder $\widehat{BC}$ oder $\widehat{CA}$ liegen. Weil zwei benachbare Quadratseckpunkte bilden eine Boge mit Grösse $\frac{\pi}{2}$, die übrigbleibenden zwei Bogen können nicht beide $\frac{\pi}{12}$ überschreiten, weil $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$.

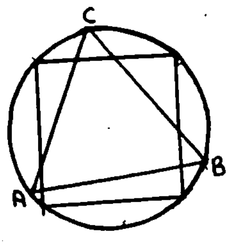


Abb. 1

3.Nachweis der Falschheit von Allaussagen durch Konstruktion eines Gegenbeispiels.
Beispiel:Für jede Parallelogramma gilt:die Diagonalen halbieren die entsprchenden Winkel des Parallelogramms.
Gegenbeispiel:/Abb. 2 /

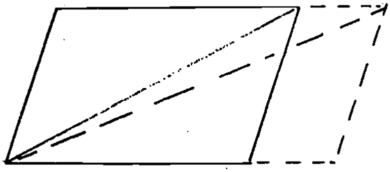


Abb. 2

4.Nachweis der Wahrheit von Allaussagen bzw. der Falschheit von Existenzaussagen durch logisches Schliessen.
Wichtigste Schlussformen:

Modus tollens: $$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \sim q \end{array}}{\sim p}$$

Kontraposition: $p \rightarrow q \Leftrightarrow q \rightarrow p$

Eliminationsmethode:

$$[(p \wedge q \wedge r) \wedge (\sim p \wedge \sim q)] \Rightarrow r$$

Reductio ad Absurdum

Beispiele:

I.Zu beweisen:Wenn in einem Dreieck gilt:$a^2 > b^2 + c^2$,dann ist $\alpha > 90^\circ$,das Dreieck ist stumpfwinklig.

Beweis:a./Wir nehmen an,dass $\alpha < 90^\circ$ sei.Dann gilt nach dem Kosinussatz $a^2 < b^2 + c^2$.Das ist ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung.Also kann der Winkel nicht kleiner als 90° sein.

b./Wir nehmen an,das Dreieck sei rechtwinklig mit $\alpha = 90^\circ$.
Dann gilt nach dem Pythagorassatz $a^2 = b^2 + c^2$
Das ist auch ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung.Also α kann nicht gleich 90° sein.

Aus a. und b. folgt,dass das Dreieck stumpfwinklig sein muss.

Weitere Beispiele:Umkehrung des Thalessatzes,Sehnenvier-

eckssatzes.

Reductio ad Absurdum:Es gibt kein gleichseitiges Gitterpunktdreieck.

Nehmen wir an,es gibt ein gleichseitiges Gitterpunktdreieck /s. Abb. 3 ! /

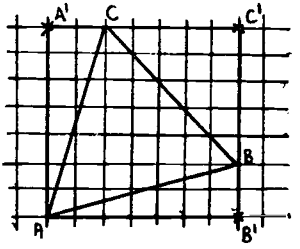


Abb. 3

Weil die Eckpunkte des Dreiecks Gitterpunkte sind,die Koordinaten der Eckpunkte ganze Zahlen sind.Daraus folgt,dass das Quadrat der Seitenlängen des Dreiecks ganze Zahl ist. Das bedeutet : $T_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ eine irrationale Zahl ist.

Ausserdem gilt: $T_{ABC\triangle} = T_{AB'C'A'\square} - T_{BC'C\triangle} - T_{AB'B\triangle} - T_{CA'A\triangle}$

Aus der Konstruktion folgt,dass alle Eckpunkte des Rechtecks ganzzahlige Koordinaten haben und der Flächeninhalt des Rechtecks sowie die Flächeninhalte der rechtwinkligen Dreiecke rationale Zahlenwerte sind.Die Differenz der Flächeninhalte muss also auch eine rationale Zahl sein.Damit haben wir einen Widerspruch bekommen,es existiert also kein gleichseitiges Gitterpunktdreieck.

5.Lösen von Identifizierungsaufgaben mit Hilfe von Definitionen.

Beispiel:Die Seiten des Vierecks ABCD sind nicht parallel zueinander,daraus folgt dass das Viereck ABCD kein Parallelogramm ist./Kontraposition zur Aussage:"Wenn ein Viereck ein Parallelogramm ist,dann sind die gegenüberliegenden Seiten parallel zueinander."

6.Begründen von Lösungswegen,Lösungsschritten bzw.Lösungsergebnissen mit Hilfe von Definitionen,Sätzen,Regeln,Verfahren.

Es gibt einige sinvolle Kontrollmethoden zur Überprüfung

des Resultats.Dabei spielt auch die indirekte Methode bei der Selbstkontrolle eine wichtige Rolle.

Dimensionstest

Bei der Verwendung von Grössen müssen auf den beiden Seiten einer Gleichung die gleiche Masseinheit stehen.

Beispiel:die nachstehende Formel für den Flächeninhalt eines Fünfecks muss falsch sein,weil die Dimension der linken Seite cm^2 und der rechten Seite cm^3 ist.

$$A = \sqrt{p/p-a_1//p-a_2//p-a_3//p-a_3//p-a_4//p-a_5/}$$

a_i:Seitenlänge

p: Halbumfang

Symmetrieeigenschaften

Wenn man die Aufgabe zu lösen hat,eine Formel für den Abstand des Berührungspunktes zweier Kreise von ihrer Tangente zu finden /die zwei Kreisen liegen nicht ineinander/,so muss man bezüglich der Radien a,b eine symmetrische Formel erhalten.Also muss die nachstehende Formel falsch sein:

$$x = \sqrt{a^2 + 2b^2}$$

x:Abstand des Berührungpunktes von der Tangente

Schätzen,Überschlagsrechnen

Diese Tätigkeiten spielen eine Kontrollrolle auch.Die Schüler sollen befähigt werden ihre Ergebnisse kritisch zu bewerten.

Beispiele

1.Die Seite eines Parallelogramms sind 3 cm bzw. 1 cm.Der Winkel der Diagonalen ist 45°.Den Flächeninhalt zu bestimmen.

Bei einer Studentenbefragung-IV.Studienjahr,Fachkombination Mathematik-Physik - 41,6% der befragten Studenten haben folgende Lösung gegeben:/s. Abb 4 !/

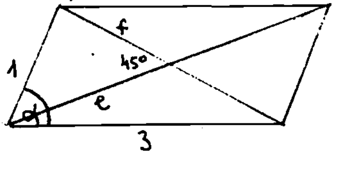


Abb.4

$$A = \frac{4ef\sqrt{2}/2}{2} = ef\sqrt{2}$$

$$e^2+f^2-2ef\sqrt{2}/2 = 1$$
$$e^2+f^2+2ef\sqrt{2}/2 = 9$$
$$4ef\sqrt{2}/2 = 8$$
$$ef\sqrt{2} = 4$$

$A = 4\ cm^2$

Aber: $A = ab \sin\alpha = 1.3 \sin\alpha \leqq 3$ /cm^2/

2.Alle Kanten eines regelmässigen geraden Prismas sind gleich /a/.Betrachten wir die Ebene die durch eine Grundkante geht und bildet mit der Grundfläche einen Winkel 60°. Wie gross ist der Flächeninhalt der Schnittfigur der Ebene und des Prismas?

57,3% der befragten Studenten haben die Schnittfigur als Dreieck genommen,obwohl das ein Trapez ist./s. Abb.5 !/

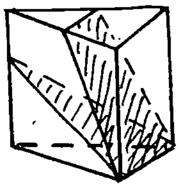


Abb. 5

Einige ungarischen Erfahrungen im Thema indirekte Argumentieren,Begründen,Beweisen.

Geometrische Aufgaben eines Schülerinterviews

1. Gibt es ein Dreieck mit $h_a, h_b, h_c > 2cm$ und $A < 2cm^2$? /h_i: Höhe des Dreiecks /
2. Zu beweisen:In jedem Dreieck gilt:dem grösserem Winkel liegt die grössere Seite gegenüber.
3. A,B,C,D seien vier Punkte einer Ebene.Der Winkel ABC sei 80° und der Winkel BCD 120°.Beweisen Sie,dass AB und CD Geraden sind die nicht parallel zueinander verlaufen.

Zwischen den befragten Schülern waren einige aus der Klasse 8 bzw. aus der Klasse IV. des Gymnasiums.Zwischen Ihnen waren mittlere,schwache und begabte auch.

Einige Konzekvenzen

1.Die meisten Schüler denken direkt bzw. konstruktiv.Von sich aus,also ohne Hilfe des Lehrers,hat keiner der in die Untersuchung einbezogenen Schüler indirekt argumentiert.

2.Die Argumentationen bzw. Begründungen der Schüler waren im allgemeinen mangelhaft.Auch die leistungsstarken Schüler entnahmen viele Aussagen der Anschauung.

3.Bei den Schülern sind die Kontrollfähigkeit und Kontrollwilligkeit unbefriedigend entwickelt.Sie sind zufrieden wenn sie überhaupt irgendein Ergebnis gefunden haben und unterziehen es nur selten einer kritischen Wertung.

4.Bei keinem Probanden konnte bewusste Nutzen einer heuristischen Strategie beobachtet werden,obwohl es für die Schüler sehr hilfreich gewesen wäre.Es erscheint sinnvoll, die Schüler zu lehren,bei welchen Beweisaufgaben die indirekte Methode zu bevorzugen ist.

5.Die meisten Schüler begannen ihre Lösung ohne eine bewusste Analyse der Aufgabenstellung.Auch die Phase einer sinnvollen,geplanten Suche nach Mittel und Methode zum Finden einer Lüsungsidee konnte kaum beobachtet werden.

6.Am Ende des Problemlösungsprozesses wurde von den Probanden nur selten die Aufgabenstellung mit der gefundenen Lösung verglichen und überprüft.

Erfahrungen eines Lehrerinterviews

1.Die Prüfungsorientheit herrscht leider unseren Mathematikunterricht.Eine Lehrermeinung:"Wir haben keine Zeit auf solche Dinge.Zwischen Prüfungsaufgaben kommen nur solche Aufgaben vor,die nur die direkten Beweismethoden brauchen. Also es lohnt sich nur diese Methoden tranieren."

2.Es fehlt die Reflexion,das Hervorheben,das Bewusstmachen der verwendeten Lösungsstrategien nach der Aufgabenlösung. Ein Kollege meinte:"Ich mache keine bewussten Unterschiede zwischen der Behandlung eines direkten oder indirekten beweises im Mathematikunterricht.Man muss beide unterrichten"

3.Nach der Meinung der befragten Lehrer anwenden die Schüler sehr selten indirekte Methoden.

Eine erfahrene Mentorin:"Allerdings-und das will ich ganz aufrichtig sagen-hat in meiner 30jährigen Praxis noch nie ein Schüler z.B. beim Beweis der Umkehrung des Thalessatzes den Vorschlag gemacht,die indirekte Beweismethode zu nutzen."
Ein Lehrbuchautor,Fachberater:"Seit 40 Jahren leite ich verschiedene mathematische Zirkel für begabte Schüler,aber nur selten konnte ich beobachten,dass Schüler indirekte Überlegungen anstellten."
Ein erfahrener Lehrer:"Von sich aus wenden die Schüler die indirekte Beweismethode nicht an.Äusserst selten beginnt ein Schüler beim Lösen einer Beweisaufgabe mit der Frage: Was wäre,wenn...?"
Ich meine,die Lehrer sollten in ihrem Unterricht die Schüler mit den verschiedenen indirekten Beweistechniken bewusst bekanntmachen.Der Unterricht darf nicht nur die spontane Selbstentwicklung der Schüler sein.Man soll die Schüler auf die neuen Methoden auch lehren.

4,Leider benutzen die meisten ungarischen Lehrer die heuristischen Strategien in ihrem Unterricht nicht.Es ist kein Zufall,dass unsere Schüler beim Problemlösen so selten indirekt überlegen.Dazu brauchen sie mehr Hilfe.Einige heuristische Strategien für die Behandlung von indirekten Methoden:
"Wenn kommt in der Behauptung einer Aussage das Wort "nicht" vor,probiere die Aussage indirekt beweisen!"
"Wenn kommen nur einige Fälle im Zusammenhang einer Aussage vor-z.B. eine natürliche Zahl kann gerade oder ungerade sein;ein Dreieck spitzwinklig,oder rechtwinklig oder stumpfwinklig ist-es ist zweckmässig die Eliminationsmethode anwenden."
"Bei den Eindeutigkeits bzw. Existenzproblemen ist es zweckmässig die indirekte Methode anwenden."
Interessant ist bemerken,dass nach dem Interview mehrere Lehrer haben mir gesagt,dass sie bemerkt haben ,wie oft kommen die indirekten Argumentationen zwischen den Schülerbegründungen vor.

Man sollte die indirekten Methoden in der Lehrerausbildung, Lehrerweiterbildung und in der methodischen Fachliteratur bewusst ins Zentrum stellen.

Literatur

1.Kolmogorow,A.N.:Matematika kak nauka i professija Nauka Moskwa,1988

2.König,H.:Indirekte Beweise und ihre Behandlung im Unterricht.Mathematik in der Schule /Berlin/ 11/1972 S.615-625

3.Engen,H.:Strategeies of Proofs in secondary Mathematics The Mathematics Teacher,Dec.1970.S.637-645

4.Polya,G.:A gondolkodás iskolája /Schule des Denkens/ Tankönyvkiadó Budapest,1968

5.Roberti,J,V.:The indirect Method. The Mathematics Teacher,Jan.1987.S.41-43

6.Walsch,W.-Goldberg,E.:Erkentnisse und Standpunkte zur Entwicklung des Beweisverständnisses und von Fähigkeiten im Beweisen im Mathematikunterricht.MLU Halle,1987

Gerhard Becker (Bremen, Germany)

USING ANALOGIES IN EARLY SECONDARY EDUCATION IN GEOMETRY

Abstract

Analogies are known to belong to the most fruitful ideas in science at all. Especially geometry offers an extended area of topics to train thinking in analogies and using analogies in order to find new results. The following examples are taken from the topic domain determined by the triangle inequality and inferences drawn from it. Plane figures and statements about lengths of line segments occurring in these figures can be taken as starting-points for corresponding statements about spatial figures obtained by analogy transfer.

There cannot be any doubt about the great importance of analogy in intellectual activities. Even a few well-known paradigmatic cases already ascertain the crucial role analogies played in the history and development of science. The outstanding role of this thinking pattern especially in mathematical thinking was highlighted by George Polya, who shows the usefulness of analogies in discovering new properties of mathematical objects or in trying to find arguments and proofs (Polya, 1954). Recently the importance of analogical reasoning, especially in mathematical thinking, could be established by psychologists, and among many other interesting results, it turned out that particularly students highly gifted in mathematics will use analogies in extraordinarily skilful forms, when storing information in memory and processing information (van der Meer 1985).

It is not surprising that many authors have attempted to illustrate in which way the idea of analogy can be made fruitful for mathematics education (f.i. Hartkopf 1964, 77; Polya 1954, chapter 2; Weinacht 1958, 11).

According to G. Polya, analogy is a kind of correspondance between relations: If we consider two different domains of objects, one of them being far more familiar than a second to a problem solver, a transfer of knowledge may be based on finding corresponding relations or transformations between these two object domains and specific relations in each of them. A more formal definition of the analogy concept is given f.i. in Klix, 1979. Of course, an analogy transfer will not be of cogent character; we always have to check whether or not a result obtained by analogy transfer actually holds.

Transfer by analogy may in general consist in
- reducing or extending the complexity of any subject (concept, statement, argument, task),
especially with respect to geometry in
- decreasing or increasing the number of vertices, edges, faces, or other parts of a geometrical figure
- decreasing or increasing dimensions of parts or of the whole figure
- changing number or kinds of parameters determining the figure, and consequently of construction or proof steps
- exchange of premise and conclusion, eventually forming new combinations of partial premises and partial conclusions of a theorem (the latter in principle not only pertaining to geometry, but since proving and preliminary steps to it in secondary education particularly is done in geometry, these types of analogous modifications work out mainly in this topic domain).

The following examples illustrate these categories and combinations of them. They are concentrated on the triangular inequality and inferences drawn from it. When starting to make conscious certain types of reasoning we do well to choose topics not too complicated and nevertheless admitting a rich variety of little modifications (cf. Becker 1987). The triangular inequality is an outstanding example fulfilling these conditions. If we do not prefer to stress upon analogy transfer, the examples canas well be considered f. i. as a collection of properties of elementary geometrical figures to be brought into a logical order according to H. Freudenthal's program of "ordering a field" of topics (Freudenthal 1973, 128).

In a short article R.C.H. Tanner claims that "mathematics begins with inequality" (Tanner 1961). This is admittedly anyhow an over-estimation, but it contains a realistic assessment in the following sense. In her article the author enters into the contrast between tools used in mathematical activities and the process of mathematical work on the one side, and presenting a final result in a chiseled, elaborated form on the other side. She matches the inequality rather with the earlier phases of mathematical work, which are determined by heuristical approaches, in contrast to the more static results often given as equalities. Although the quoted article deals with inequality of numbers, within the topic domain of geometry the triangular inequality represents a topic not less fundamental than forming arguments by using inequalities in numbers.

Starting with the task, to find a point C, such that $L(\overline{AC})=b$, $L(\overline{BC})=a$, the lengths a, b, and $c=L(\overline{AB})$ and points A, B being given, we may discover, that such a point C will

- not to be found if $c > a + b$ (1.1),
- exist and ly on line segment $\overline{AB}$ if $c = a + b$ (1.2)
- exist and not ly on line segment $\overline{AB}$ if $c < a + b$ (1.3).

Thus, the condition for a point C lying on a line segment $\overline{AB}$ is the equation

$$L(\overline{AB}) = L(\overline{AC}) + L(\overline{BC}) \qquad (1.2')$$

whereas the triangle inequality

$$L(\overline{AB}) < L(\overline{AC}) + L(\overline{BC}) \qquad (1.3')$$

describes the case that C is not lying on $\overline{AB}$.

With respect to the following considerations, we denote the length of a line segment $\overline{AB}$ by $|\overline{AB}|$ instead of using the letter L.

The basic properties (1.2') and (1.3') allow us, to draw the following inferences:

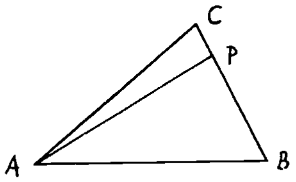


Fig. 1

For any point $P \in \overline{BC}$ $(P \neq B,C)$:

$$|\overline{AP}| + |\overline{PB}| > |\overline{AB}|$$
$$|\overline{AC}| + |\overline{CP}| > |\overline{AP}| \text{, thus}$$
$$|\overline{AC}| + |\overline{CB}| > |\overline{AP}| + |\overline{PB}| > |\overline{AB}| \qquad (1.4).$$

Using this result twice, we obtain for any point $Q \in \overline{AP}$ $(Q \neq A, P)$

$$|\overline{AP}| + |\overline{PB}| > |\overline{AQ}| + |\overline{QB}|$$
$$|\overline{AC}| + |\overline{CB}| > |\overline{AP}| + |\overline{PB}| \text{, thus}$$
$$|\overline{AC}| + |\overline{CB}| > |\overline{AQ}| + |\overline{QB}| > |\overline{AB}| \qquad (1.5).$$

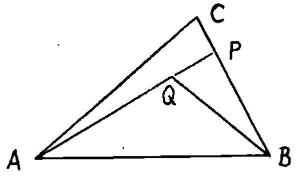


Fig . 2

Finally, using (1.5) three times, we get for any point Q within triangle ABC

$$|\overline{AC}|+|\overline{CB}|>|\overline{AQ}|+|\overline{QB}|>|\overline{AB}|$$
$$|\overline{BA}|+|\overline{AC}|>|\overline{BQ}|+|\overline{QC}|>|\overline{BC}|$$
$$|\overline{CB}|+|\overline{BA}|>|\overline{CQ}|+|\overline{QA}|>|\overline{AC}| \quad \text{and}$$

$$2(|\overline{AB}|+|\overline{BC}|+|\overline{AC}|)>2(|\overline{AQ}|+|\overline{BQ}|+|\overline{CQ}|)>|\overline{AB}|+|\overline{BC}|+|\overline{AC}| \qquad (1.6),$$

or, with the abbreviations p (for the perimeter of the triangle) and s (for the sum of the distances of point R from A, B, and C) :

$$\tfrac{1}{2}p < s < p \qquad (1.6')$$

(cf. Schupp, 1978).

These results suggest analogy transfer into the space; the object corresponding to the triangle in the plane is the pyramid. Let us start with prop-

erties of combinations of line segments, successively varying the results (1.3) to (1.6): Obviously, (1.3) holds for spatial triangles, too.

Considering three line segments instead of two,
for any point $D \notin \Delta ABC$, even more $|\overline{AD}|+|\overline{BD}|+|\overline{CD}| > |\overline{AB}|$ (2.3)
holds. But, can we alter (1.3) into $|\overline{AD}|+|\overline{BD}|+|\overline{CD}| > |\overline{AB}|+|\overline{AC}|$ (2.3')
for any point $D \notin \Delta ABC$, too? Here (and in the following considerations) D is not restricted to the plane of Δ ABC 8cf. fig. 3).

(2.3') does not hold, as can be verified by a "narrow" pyramid, with D "shortly over" the "basical triangle" ABC and "close to" B and C.

After that, $|\overline{AD}|+|\overline{BD}|+|\overline{CD}|>|\overline{AB}|+|\overline{BC}|+|\overline{AC}|$ (2.3")
is less likely, the falsification can be given by a pyramid with D lying "shortly over" ABC and the comparison with (1.6) especially for the projection point D' of D into the plane of Δ ABC.

Already these few examples show that many different forms of arguments in the considered topic field are quite obvious.

Trying to find relations analogous to (1.4) between the determining line segments of the figure under consideration and its bordering elements, we may happen on the following:
for any point $P \in \Delta BCD$ ($P \neq D$)
$|\overline{AD}|+|\overline{BD}|+|\overline{CD}| > |\overline{AP}|+|\overline{BP}|+|\overline{CP}|$ (2.4),
which can be refuted by considering a "narrow" pyramid, with D "shortly over" Δ ABC and "far away" from A, B, and C, and P "close to" C.

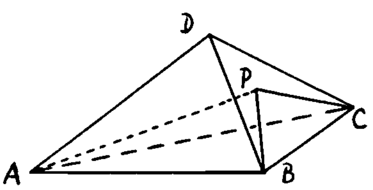


Fig. 3

(1.5), referring to an inner element, has a corresponding case in:
for any inner point Q of the pyramid ABCD:
$|\overline{AD}|+|\overline{BD}|+|\overline{CD}|>|\overline{AQ}|+|\overline{BQ}|+|\overline{CQ}|$ (2.5').
Falsification of the latter can be obtained by a "narrow" pyramid with D "shortly over" Δ ABC, "close to" A and B, and Q "close to" C.

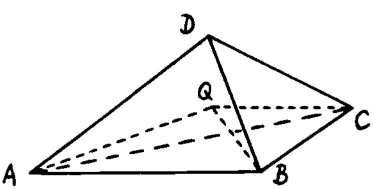


Fig. 4

Another property of a pyramid, got by analogous alteration of (1.5), and linking the determining vertices with an inner element, is the following:
for any inner point Q of the pyramid ABCD:

$$|\overline{AB}|+|\overline{BC}|+|\overline{AC}|+|\overline{AD}|+|\overline{BD}|+|\overline{CD}| > |\overline{AQ}|+|\overline{BQ}|+|\overline{CQ}|+|\overline{DQ}| \quad (2.5)$$

This result can be established by taking into consideration the intersection point S of the line segment $\overline{CD}$ with the plane determined by Δ ABQ:

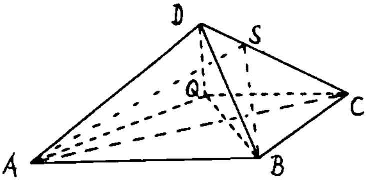


Fig. 5

We have, according to (1.5), $|\overline{AS}|+|\overline{BS}| > |\overline{AQ}|+|\overline{BQ}|$,
according to (1.3) repeatedly
$|\overline{AD}|+|\overline{DS}|>|\overline{AS}|$ and
$|\overline{SC}|+|\overline{BC}|>|\overline{BS}|$, thus

$$|\overline{AD}|+|\overline{CD}|+|\overline{BC}|>|\overline{AS}|+|\overline{BS}|>|\overline{AQ}|+|\overline{BQ}| ,$$

and correspondingly $|\overline{AC}|+|\overline{AB}|+|\overline{BD}|> \quad |\overline{CQ}|+|\overline{DQ}|$;

adding both lines yields

$$|\overline{AB}|+|\overline{AC}|+|\overline{AD}|+|\overline{BC}|+|\overline{BD}|+|\overline{CD}| > |\overline{AQ}|+|\overline{BQ}|+|\overline{CQ}|+|\overline{DQ}| \quad (2.5).$$

Applying six times the triangle inequality (1.3), we obtain

$$|\overline{AQ}|+|\overline{BQ}|>|\overline{AB}|$$
$$|\overline{BQ}|+|\overline{CQ}|>|\overline{BC}|$$
$$|\overline{AQ}|+|\overline{CQ}|>|\overline{AC}|$$
$$|\overline{AQ}|+|\overline{DQ}|>|\overline{AD}|$$
$$|\overline{BQ}|+|\overline{DQ}|>|\overline{BD}|$$
$$|\overline{CQ}|+|\overline{DQ}|>|\overline{CD}| ,$$

and by adding these lines we come to

$$3(|\overline{AQ}|+|\overline{BQ}|+|\overline{CQ}|+|\overline{DQ}|) > |\overline{AB}|+|\overline{AC}|+|\overline{AD}|+|\overline{BC}|+|\overline{BD}|+|\overline{CD}| \quad (2.6),$$

which is equivalent to

$$\tfrac{1}{3}p < s < p \quad (2.6'),$$

if we denote by p and by s respectively the sum $|\overline{AB}|+|\overline{AC}|+|\overline{AD}|+|\overline{BC}|+|\overline{BD}|+|\overline{CD}|$ and $|\overline{AQ}|+|\overline{BQ}|+|\overline{CQ}|+|\overline{DQ}|$.

Trying to find an analogy to (1.2) and (1.3) referring to two-dimensional objects we come upon the area of a triangle (in the space). Obviously, since

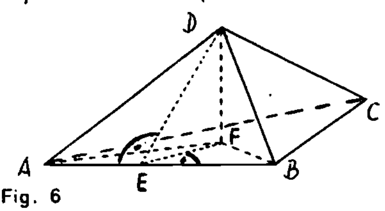


Fig. 6

$|EF|<|ED|$ holds, and thus $|ABF| < |ABD|$, too, ($|ABF|$ denoting the area of Δ ABF, and so on), we get
for any point $D \in \Delta$ ABC:

$$|ABC|= |ABD|+|BCD|+|ACD| \quad (3.2)$$

and for any point $D \notin \Delta$ ABC:

$$|ABC|< |ABD|+|BCD|+|ACD| \quad (3.3).$$

(3.3) may be called the pyramidal inequality.

In a quite analogous way as coming from (1.2) and (1.3) to (1.6), we now

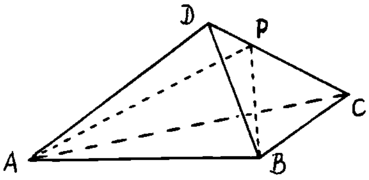


Fig. 7

can conclude:
for any point $P \in \overline{CD}$ $(P \neq C,D)$
$|ABD|+|BPD|+|APD| > |ABP|$
and since
$|BCP|+|ACP| = |BCP|+|ACP|$, also
$|ABD|+|BCD|+|ACD| >$
$|ABP|+|BCP|+|ACP|$ (3.4)

Aplying this result to a point $Q \in \overline{BP}$ $(Q \neq B,P)$, thus $Q \in \Delta\ BCD$), we get

$$|ABP|+|BCP|+|ACP| > |ABQ|+|BCQ|+|ACQ| ,$$

and together with (3.4):
for any point $Q \in \Delta\ BCD$: $|ABD|+|BCD|+|ACD| > |ABQ|+|BCQ|+|ACQ|$ (3.4'),
and again when applying (3.4') to a point $R \in \overline{AQ}$:

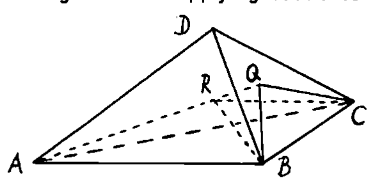


Fig. 8

$|ABQ|+|BCQ|+|ACQ| > |ABR|+|BCR|+|ACR|$,
thus, together with (3.4'):
for any point $R \in$ pyramid ABCD:
$|ABD|+|BCD|+|ACD| >$

$$|ABR|+|BCR|+|ACR| > |ABC| \quad (3.5).$$

Using (3.5) four times - instead of three times, as was done with (1.5) - and adding up the four lines gives us

$$|ABD|+|ACD|+|BCD| > |ABR|+|ACR|+|BCR| > |ABC|$$
$$|ABC|+|ACD|+|BCD| > |ABR|+|ADR|+|BDR| > |ABD|$$
$$|ABC|+|ABD|+|BCD| > |ACR|+|ADR|+|CDR| > |ACD|$$
$$|ABC|+|ABD|+|ACD| > |BCR|+|BDR|+|CDR| > |BCD| \quad ,$$
$$3(|ABC|+|ABD|+|ACD|+|BCD|) > 2(|ABR|+|ACR|+|ADR|+|BCR|+|BDR|+|CDR|)$$
$$> |ABC|+|ABD|+|ACD|+|BCD|$$

which is equivalent to

$$\tfrac{1}{2} P < S < \tfrac{3}{2} P \qquad (3.6)$$

where P and S denote the terms $|ABC|+|ABD|+|ACD|+|BCD|$ and $|ABR|+|ACR|+|ADR|+|BCR|+|BDR|+|CDR|$ respectively.

Can we modify the initial properties (1.1), (1.2), and (1.3) with respect to the power of the terms forming the summands, and do those modified results have any geometric meaning?

By doing so, we get
$c^2 > a^2 + b^2$ (4.1) , $c^2 = a^2 + b^2$ (4.2), $c^2 < a^2 + b^2$ (4.3)
characterizing an obtuse triangle, a right triangle, and an acute triangle respectively.

As a "comprehension" of these three lines can be regarded the cosine theorem $c = a + b - 2ab\cos\gamma$ (4.4).

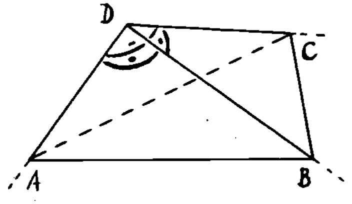


Fig. 9

The "plane equality" (4.2) can be transferred to the space, and we have:
For any pyramid ABCD with right plane angles in the faces ABD, BCD, and ACD at vertex D

$$|ABC|^2 = |ABD|^2 + |BCD|^2 + |ACD|^2 \quad (5.2)$$

holds.

We can obtain an equation corresponding to (4.4) with not too much effort as follows. Considering the relation

$$F_1 = F_2 \cos(F_1, F_2) + F_3 \cos(F_1, F_3) + F_4 \cos(F_1, F_4),$$

we get by a few intermediate steps

$$F_1^2 = F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 - 2F_1F_2\cos(F_1,F_2) - 2F_1F_3\cos(F_1,F_3) - 2F_1F_4\cos(F_1,F_4) \quad (5.4).$$

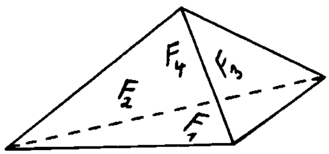


Abb.10

The latter already goes far beyond what usually can be done in secondary mathematics education, however, it shows that finding analogies (and even proving them) includes fairly pretentious activities.

References

Becker, G. 1987. Über den Beitrag des Geometrieunterrichts zum Erwerb heuristischer Strategien. In: mathematica didactica 10 (1987), 123-144

Dörner, D. 1979. Problemlösen als Informationsverarbeitung. Stuttgart: Kohlhammer. 2nd edition

Freudenthal, H. 1973. Mathematik als pädagogische Aufgabe. Vol. 1. Stuttgart: Ernst Klett

Hartkopf, W. 1964. Erziehung zum heuristisch-methodischen Denken. In: Der Mathematikunterricht 10, Issue 1, 58-79

Klix, F. 1979. Analoges Schließen. Kognitive Analyse einer Intelligenzleistung. In: H. Ueckert, D. Rhenius (eds.) Komplexe menschliche Informationsverarbeitung. Stuttgart: Hans Huber, 162-174

Polya, G. 1954. Mathematics and Plausible Reasoning. Vol. I:Induction and Analogy in Mathematics. Princeton, N.J.: Princeton University Press

Schupp, H. 1980. Beweisen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. Didaktische Überlegungen am Beispiel der Dreiecksungleichung. In:Vorträge auf OeMG-Lehrerfortbildungstagungen am 28. September 1978 und am 27. September 1979 in Klagenfurt und Leoben. Wien, 2-13

Tanner, R.C.H. 1961. Mathematics Begins with Inequality. In: The Mathematical Gazette 45, 292-294

van der Meer, E. 1985. Mathematisch-naturwissenschaftliche Hochbegabung. In: Zeitschrift für Psychologie 193, 229-258

Weinacht, J.H. 1958. Prinzipien zur Lösung mathematischer Probleme. Braunschweig: F. Vieweg

Peter Bender (Paderborn, BRD)

WAS NÜTZT DER COMPUTER IM GEOMETRIEUNTERRICHT?

Abstract: If structuring the students' spatial environment and exploring the usefulness of this structure is an aim of geometry teaching, then the computer with its screen, keyboard and mouse is not an adequate medium to do so. With the graphical systems now available, drawings in the plane can be done rather easily, and students can observe geometrical properties of these drawings. But at the same time the involvment of the computer (Geometric Supposers, Logo based systems etc) prevents the students from thinking about plausible reasons for these properties. The Cabri Geometer seems to be the first educational graphical system to allow continuous operations on the screen, thus supporting the students' functional thinking.

Seit leistungsfähige Grafiksysteme auch auf Kleincomputern zugänglich sind, wird die Frage des C-Einsatzes im Geometrieunterricht (GU der Pflichtschule) zunehmend aktuell. Dies kann man in zweierlei Hinsicht zunächst begrüßen: Zum einen droht ja nach wie vor eine Kürzung des Mathematikunterrichts, zumindest des klassischen, und da insbesondere der Geometrie, zugunsten informatischer Inhalte; und eine Durchdringung dieses Unterrichts mit C-Aktivitäten könnte solchen Tendenzen (in einer Art Appeasement-Politik) die Spitze nehmen. Zum anderen sind selbstverständlich auch die Talente des C daraufhin zu untersuchen, ob mit ihnen die Ziele des GU besser zu erreichen oder gar zu ändern sind.

Ich gehe von der Legitimierung des GU mit folgenden Zielen aus: Strukturierung der räumlichen Umwelt und Erforschung der Nutzbarkeit dieser Struktur, Erwerb von Raumanschauungsvermögen, Argumentations-, Problemlösefähigkeit u.ä. und gewisser kulturell-philosophischer Einsichten.

Es mag in der historischen Situation unumgänglich sein, daß viele einschlägige Veröffentlichungen hauptsächlich Stoffanalysen darstellen, wo der C selbst (i.w.S., z.B. Programmierkonzepte u.ä.) den Unterrichtsinhalt ausmacht. - Aller-

dings erkennt man zunehmend (etwa im Falle der Geometrie), daß vor der Arbeit mit dem C bereits eine gewisse Begrifflichkeit durch die Schule ausgeprägt sein müsse und daß diese Arbeit nur mit bereits vorhandenen, genuin räumlichen Erfahrungen fruchtbar sein könne.

Für die folgende Diskussion setze ich den geometriedidaktisch und softwareergonomisch zugleich orientierten Übersichtsartikel von Schumann (1988) voraus und kann daher einige Fragen grundsätzlicher Natur diskutieren.

Grundsätzliche, fächerunabhängige Einwände

Neben dem Auto ist das Fernsehen die kulturverändernde 'Errungenschaft' der Moderne, und zwar - im Gegensatz zum teuren Auto - zunehmend auch in der Dritten Welt. Demgegenüber wird der Einfluß des C (wohlgemerkt: auf die Kultur; nicht auf Verwaltung, Militär, Wirtschaft, Wissenschaft und Politik) von vielen Teilnehmern an der didaktischen Diskussion überschätzt, insbesondere was Eigenaktivität und Kreativität der Nutzer betrifft. Wer nicht gerade Spieler, Hacker oder als Lehrer (i.w.S.) Verfasser von Arbeitsblättern und anderen Texten ist, für den ist der C durchweg ein öder Fortsatz der Fernseh-Bilderwelt.

Wenn dem so ist, so der Zyniker, dann kann man den C ja früh und umfangreich in die Schule einführen, seine Talente nutzen und den Schülern zugleich den Spaß daran verderben. In der Tat: Man weiß wenig über längerfristige erfolgreiche C-Nutzung in der Schule unter alltäglichen Bedingungen; und eine anfängliche Faszination, wenn die Bildschirmwelt in die Schule eingebracht wird, weicht bei vielen Schülern bald einer gewissen Ernüchterung spätestens dann, wenn sie nach dem Kennenlernen des Mediums mit raschen Erfolgserlebnissen feststellen, daß sie den Anstrengungen des Begriffs in der jeweiligen Disziplin doch nicht aus dem Weg gehen können, jedenfalls wenn ihnen der Lehrer es nicht erspart.

Leider unterliegen auch Didaktiker und Lehrer der Suggestion, daß der C einen essentiellen Anteil an den Grundbegriffen, -methoden und -erkenntnissen dieser Disziplinen hätte und daß er das Eindringen essentiell erleichtern würde. Dies trifft aber nur für die Informatik zu, und schon in der Mathematik tun sich sinnvolle Einsatzmöglichkeiten m.E. erst gegen Ende der SI auf.

Das Argument der Berufsvorbereitung ist hier auch nicht zugkräftig: Für die überwältigende Mehrheit der werktätigen Bevölkerung wird die C-Nutzung zukünftig auf einem dermaßen simplen Niveau stattfinden, daß durch die allgemeinbildende Schule über eine informationstechnische Grundbildung hinaus keine intensivere Vorbereitung erforderlich und nutzbringend ist. Gefordert von (beruflichen und betrieblichen) Ausbildern sind vielmehr Raumanschauungsvermögen und ähnliche Fähigkeiten, die der C nicht nur nicht ersetzen kann, sondern eher verkümmern läßt. Außerdem hat das Bildungssystem über den Auftrag der Berufsvorbereitung hinaus weitere wichtige Bildungs- und Erziehungsaufgaben, z.B. ein kulturelles und gesellschaftliches Gegengewicht gegen die Bildschirmwelt zu schaffen, und zwar nicht weil diese grundsätzlich von Übel wäre, sondern weil sie nicht die Welt ist, aber das Image verbreitet, die Welt zu sein. - Eine ähnliche Gefahr besteht bei den konventionellen Vermittlungsprinzipien 'Lehrer' und 'Buch' ersichtlich nicht.

Die Illusion des selbständigen Arbeitens mit dem Computer

Der C-Bildschirm wird gern als komfortables Zeichenblatt dargestellt, auf dem der Schüler selbständig: schnell, genau, bequem und viel: zeichnen und messen könne. Mit der Selbständigkeit ist es jedoch auf den verschiedenen Ebenen nicht so weit her:

Das globale Lernen mit dem C betreffend: Da hat sich inzwischen wohl doch eine gewisse Skepsis durchgesetzt gegenüber der Utopie eines Lernens ohne Schule, Lehrer und kanoni-

sches Curriculum, nur mit dem C; - zumal dieser selbst ja auch ein riesiges, von irgendjemand programmiertes Curriculum wäre.

Lokales Lernen (etwa Explorieren einer geometrischen Situation mit dem C) betreffend: Viele Analysen leiden an Didaktiker-Zentrismus, d.h. es werden (implizit) beim Schüler Interessen, Vorwissen, Erfahrungen, Strategien und Fragestellungen unterstellt, die der Didaktiker von sich selbst kennt. (Das hat man auch bei herkömmlichen Vorschlägen.)

Aktivitäten am Gerät betreffend: Hier lassen sich in der Tat Motivations- und Lerneffekte beobachten, wenn Schüler z.B. selbst Zeichnungen 'programmieren'. Es darf aber nicht die Frage verdrängt werden, wie weit sich diese Effekte überhaupt auf die Geometrie und nicht den C beziehen und wie gewichtig auf Dauer gerade der Anteil des C an etwaigen Lernfortschritten in der Geometrie ist.

Potentielle Auswirkungen auf räumliche Erfahrungen

Jedenfalls ist der Bildschirm von der räumlichen Wirklichkeit mit ihrer Dreidimensionalität und ihren praktischen Anwendungsmöglichkeiten noch weiter entfernt als Zeichenpapier, das man wenigstens knicken, zerschneiden und kleben kann usw. Und es zeigt sich eine Tendenz, daß das zarte Pflänzchen 'Realitätsbezug im GU', das in den letzten Jahren mühsam aufgepäppelt wurde, nun wieder beschnitten wird. Wofür eigentlich?

Wofür brauche ich den Schnell-, Genau-, Bequem- und Vielzeichner und -messer? Doch wohl nicht, um den Schülern die primären kognitiven und sinnlichen Erfahrungen beim Zeichnen von großen und kleinen Kreisen, langen und kurzen geraden Linien usw. usf. mit und ohne Gerät zu nehmen. Auch wenn man diese Erfahrungen nicht für sooo wichtig hält, so wird man doch spätestens beim Messen auf die Auseinandersetzung mit der Umwelt verwiesen: Eine Tischfläche kann man

zwar ausmessen, indem man abzählt, wie viele Exemplare eines C draufpassen; aber wenn man den C nicht gerade so verwendet, nützt er nicht allzu viel bei der Ausbildung von Standardgrößen, dem Prinzip des Messens oder Meßverfahren.

Der Aufbau des Bildschirms ist realitätswidrig: Er besteht aus endlich vielen Punkten; und das ist für jedermann sichtbar, da alle Figuren, insbesondere auch die Linien, sich aus Quadraten zusammensetzen und je nach Neigung gegen den Bildschirmrand höchst unterschiedlich aussehen, wodurch beim Raum die Isotropie und bei den Figuren eine etwaige Homogenität gestört ist. Löthe (1987) meint zwar, daß Kinder damit keine Probleme hätten. Dies setzt aber ausgiebige, im GU gelenkte Erfahrungen außerhalb des Bildschirms voraus. Außerdem müßte man doch erst untersuchen, was für eine Formenwelt sich da mittelfristig ausbildet.

Struve (1987) hat darauf hingewiesen, daß die Bildschirm-Geometrie eine ganz andere als die euklidische ist. Dem hat man, nicht ganz unberechtigt, entgegengehalten, daß die Zeichenblatt-Geometrie ebenfalls eine andere ist, nämlich die natürliche Geometrie Hjelmslevs, und daß eben beidesmal gewisse Idealisierungsleistungen erforderlich seien. M.E. sind diese aber am Bildschirm erheblich aufwendiger, insbesondere in Anbetracht der 'großporigen' C-Systeme, die da noch in absehbarer Zukunft auf dem Markt sein werden. Auch wenn dieser Mangel grundsätzlich behebbar ist, so ist er doch ein Indiz für eine a-geometrische Prioritätensetzung.

Allerdings kann er auch positiv gewendet werden, indem der Bildschirm z.B. als Metapher zur Unterstützung der Punktmengen-Auffassung herangezogen wird: Nicht die Punkte bewegen sich, sondern ihr Zustand gefärbt zu sein. Dies gilt für den kompletten Bildschirm, d.h. auf diese Weise kommt die ganze Ebene in den Blick. Darüber hinaus lassen sich leicht nicht-kontinuierliche Veränderungen bewerkstelligen, etwa als Grundlage für eine abbildungsgeometrische Begrifflichkeit (so man diese für wichtig hält).

Die Bedeutung kontinuierlicher Operationen für den Geometrieunterricht, der Cabri Geometer

Diese leichte Manipulierbarkeit und spurenlose Veränderbarkeit hat allerdings keine Entsprechung in der Realität oder auch nur auf dem Zeichenblatt. Ja, sogar in der menschlichen Vorstellung laufen solche Operationen grundsätzlich als stetige Veränderungen an partiell starren Körpern ab (Klieme 1987). Ob der C hier Abhilfe schaffen und den Geometrie-Lernenden von der Stetigkeits-Krücke befreien kann, ist zu bezweifeln, da die Erfahrungen mit der als kontinuierlich erlebten Umwelt primär und wohl dominant sind.

Außerdem erscheint mir diese sogenannte Befreiung eher unnötig bis nachteilig: Auch auf der Basis realer Bewegungsvorstellungen kommt man ohne Verlust an begrifflicher Schärfe beliebig weit, man bleibt stets in Tuchfühlung mit der Realität, und für funktionale Betrachtungen sind sie unersetzlich (s. Bender 1989).

Da tut sich ja dann ein anderes Talent des C auf: Die Darstellung stetiger Veränderungen. Der Film, auch der Video-Film, konnte nie, auch nur ansatzweise, im GU Fuß fassen - wegen der Schwerfälligkeit in Organisation und inhaltlichem Ablauf. Da gibt es beim C, etwa mit der Maus-Technik, ganz andere Möglichkeiten, und ein erstes Grafiksystem für den GU macht sie sich zunutze: Der Cabri Geometer von Laborde (s. Schumann in diesem Band).

Dies ist m.E. der erste Beitrag der C-Technik, der den GU wirklich voranbringen könnte; jedenfalls kann er (jedoch alles in der Ebene) funktionale Betrachtungen unterstützen, ebene Ortslinien erzeugen, dadurch Konstruktionen und Sätze finden helfen und sogar Begründungen anbahnen. Eine ergiebige Nutzung setzt jedoch eine gewisse Vertrautheit mit Geometrie voraus, und es stellt sich das Problem des Zeitaufwands, zumal zu besorgen ist, daß bei Installation des

Cabri Geometer die ebene Konstruktions-Geometrie (wieder) überhandnimmt.

Vor allem aber sind beweiskräftige Argumentationen letztlich doch in statischen Situationen zu führen. Das spricht dafür, einen Bewegungsablauf mit einer (nicht zu langen) Folge von simultan dargebotenen Standbildern zu repräsentieren. Dabei macht man sich einerseits die größere Flexibilität des menschlichen Hirns zunutze, das die Standbilder (in der Vorstellung) stetig zu verbinden hat, zum anderen trainiert man diese Vorstellungskraft, sprich: das Raumanschauungsvermögen. C-Animation kann dieses auf den Weg bringen helfen, hat sich dann aber, zumindest partiell, quasi überflüssig zu machen.

Die Geometric Supposers, Relativierung ihres Nutzens

Die Geometric Supposers von Schwartz & Yerushalmy (1985) erzeugen (nicht-simultan) Folgen von Standbildern, indem in das System eingegebene Konfigurationen durch Knopfdruck von einem Zufallsgenerator mit veränderten Maßen beliebig oft erneuert werden (mit allerlei technischem Komfort, aber auch mit technisch-begrifflichen Unzulänglichkeiten). Einen kleinen Einfluß auf die Parameter hat der Nutzer doch: Er kann spitz-, recht-, stumpfwinklige oder gleichschenklige Dreiecke wählen, ansonsten folgen aber die Bilder willkürlich aufeinander.

Die erklärte Hoffnung lautet: Wenn Vermutungen über gewisse Eigenschaften von Konfigurationen aufgetaucht sind, so kann man diese schnell an vielen Beispielen überprüfen. Allerdings haftet diesem Vermuten eine gewisse Oberflächlichkeit an, weil zwischen den einzelnen Bildern nur schwache bis keine Beziehungen hergestellt werden. Außerdem ist das Vermuten von Sätzen nur ein kleiner Ausschnitt des Geometrie-Curriculums, der m.E. seinen Wert erst im Zusammenhang mit dem Beweisen bzw. Begründen gewinnt. (Es mag sein, daß man

im US-amerikanischen GU häufig schon froh ist, wenn wenigstens das Vermuten geleistet wird).

Der C fördert <u>diese Weiterführung</u> nicht gerade, wie z.B. der Vorschlag der Autoren zur Behandlung der Dreieckswinkelmaßsumme zeigt: Es mag dahinstehen, ob hier überhaupt eine sinnvolle Beweis-Aufgabe vorliegt. Wenn jedenfalls der Geometric Supposer für viele Dreiecke die Winkelmaßsummen ermittelt hat, dann besteht infolge der Genauigkeit des C und seinem Image des Unfehlbaren bestimmt kein Beweisbedürfnis mehr (natürlich existiert beim Cabri Geometer sowie bei vielen herkömmlichen Vorschlägen dieselbe Gefahr).

<u>Eigenhändiges</u> Zeichnen und Messen dagegen kann auch bei umfangreichen Aufgaben nützlich sein, indem es stärkeren und schwächeren Schülern Phasen kognitiver <u>Entlastung</u>, Muße zur <u>detaillierteren Beschäftigung</u> und die Möglichkeit der <u>Reifung von Problemen</u> bietet.

Zum Programmieren als Essenz der Begriffsbildung

Während die Nutzung des C als komfortables Zeichen- und Meß-Werkzeug sinnvollerweise <u>menü-gesteuert</u> vor sich geht, gibt es auch <u>kommando-getriebene</u> Ansätze, in denen Programmieren ein wichtiger Bestandteil geometrischer Betätigung und Begriffsbildung ist: Dies gilt vor allem für diverse <u>Varianten der Logo-Philosophie</u>: Zwar ist das Papertsche Original mit seinen pädagogischen und psychologischen Aussagen unzulänglich (s. Bender 1987), aber inzwischen gibt es leistungsfähigere Systeme, die nach Abstrich ihrer informatischen Dominanz durchaus diskutabel sind.

Besonders interessant ist der Aspekt, daß die <u>Programm-Moduln</u> (zum Zeichnen der geometrischen Formen) die <u>eigentlichen Begriffe</u> und die Zeichnungen eher Protokolle sind (s. Löthe 1987). Dies erinnert an die gute, alte Konstruktionsbeschreibung, aber auch an das Prinzip der operativen Begriffsbildung im Sinne von Bender & Schreiber (1985), nach

dem die Essenz geometrischer Begriffe aus Handlungsanweisungen und Herstellvorschriften besteht, als welche man auch Programme für den C auffassen kann. Allerdings fehlen der Programmier-Geometrie zwei wesentliche Komponenten: Die Ausrichtung an Zweckhaftigkeits- und Funktions-Überlegungen und der prinzipielle Anspruch auf Realisierung und Gebrauch geometrischer Formen. Dieses Fehlen verleiht der Programmier-Geometrie einen gewissen Anstrich von Beliebigkeit (wie bei der Neuen Mathematik seinerzeit).

C-Programme sind zwar handfester als etwa Symmetriegruppen; die ihnen zugewiesene Rolle liegt aber auch im Trend der Ent-Geometrisierung des GU in den letzten dreißig Jahren, die diesem nicht gut getan hat. Wenn man aber auf der Programm-Ebene arbeiten möchte, dann lassen sich Fragen bearbeiten wie: Wann sind zwei Moduln äquivalent (äquivalent bis auf Ähnlichkeit, bis auf Orientierung)? Wie beeinflussen Zahl und Art der Parameter den Begriffsumfang und -inhalt? Was passiert, wenn überall 'links' und 'rechts' oder 'vorwärts' und 'rückwärts' oder beide Befehlstypen zugleich vertauscht werden? - Wie mit solchen Programmen als mathematischen Objekten umzugehen ist, liegt allerdings keineswegs auf der Hand, und es läßt sich kaum verhindern, daß Schüler doch an der Zeichnung und nicht am Programm argumentieren (s. z.B. den Bericht von Paetzold & Pilz 1988).

Computer im Geometrieunterricht als Anwendungsbeispiel für die informationstechnische Grundbildung

Wenn etwa ab dem 9. Schuljahr eine hinreichend breite begriffliche Basis vorhanden ist und sich Fragestellungen eröffnen, die einen mehr als sporadischen C-Gebrauch sinnvoll machen, oder ein zweiter Durchgang aus der Perspektive des Programmierens vorgesehen ist, wird möglicherweise Zeitmangel den Einsatz auf den Status eines Anwendungsbeispiels im Rahmen der informationstechnischen Grundbildung reduzieren. Dies erscheint mir nicht nur nicht schlimm, sondern sehr wohl angemessen, zumal die zur Rechtfertigung einer inten-

siveren Verwendung des C m.E. erforderliche Erstellung eines globalen Geometrie- (oder noch allgemeineren) Curriculums mit konkreten fachlichen Zielen, Identifizierung des spezifischen Beitrags des Computers zu deren Erreichung, und zwar in typischen Unterrichts- und nicht in Didaktiker-Situationen, sowie einer Abwägung der Palette der Nachteile dieses Beitrags - noch lange nicht geleistet ist.

Literatur

Bender, Peter (1987): Kritik der Logo-Philosophie. In: Journal für Mathematikdidaktik 8, 3-103

Bender, Peter (1989): Anschauliches Beweisen im Geometrie-Unterricht - unter besonderer Berücksichtigung von (stetigen) Bewegungen bzw. Verformungen. In: Hermann Kautschitsch & Wolfgang Metzler (Hrsg.): Anschauliches Beweisen. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, Stuttgart: Teubner, 95-145

Bender, Peter & Alfred Schreiber (1985): Operative Genese der Geometrie. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, Stuttgart: Teubner

Klieme, Eckhard (1987): Bildliches Denken: Kongnitionspsychologische Modelle und didaktische Strategien. In: Hermann Kautschitsch & Wolfgang Metzler (Hrsg.): Medien zur Veranschaulichung von Mathematik. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, Stuttgart: Teubner, 43-67

Löthe, Herbert (1987): Benders Kritik und die Wirkung. In: Journal für Mathematikdidaktik 8, 315-319

Paetzold, Claus & Eva Pilz (1988): Mit dem Igel durch das Haus der Vierecke. In: Klaus-Dieter Graf (Hrsg.): Computer in der Schule 2. Stuttgart: Teubner, 35-57

Schumann, Heinz (1988): Der Computer als Werkzeug zum Konstruieren im Geometrieunterricht. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 20, 248-263

Schumann, Heinz (in diesem Band): Neue Möglichkeiten des Geometrielernens durch interaktives Konstruieren.

Schwartz, Judah L. & Michael Yerushalmy (1985): The Geometric Supposer: Triangles. Pleasantville: Sunburst

Struve, Horst (1987): Probleme der Begriffsbildung in der Schulgeometrie - Zum Verhältnis der traditionellen Euklidischen Geometrie zur "Igelgeometrie". In: Journal für Mathematikdidaktik 8, 257-276

Jorma Enkenberg (Joensuu, Finland)

Computers, geometry and Logo

Abstract

The purpose of the article is to examine possibilities of some computer environments in transmitting of geometrical kowledge in our primary schools. Most of existing general graphics software offer good tools for learning embedded geometry. However they are not as good in developing knowledge of concepts or structure in geometry. Both Geometric Supposers and Logo are suggested to be tools for that. They can act as mediums both for concept formation and for learning relationships between concepts supporting so structural development of geometry in student's minds. They can also emphasize thinking processes in learning situation. In the article it is also introduced three succesful methods to use Logo in primary school classrooms.

Background

Computer environments have gone through enormous change during last ten years since the revolution of personal computers. From text-oriented screens we have moved towards visual user interfaces. Painting and designing software have become popular both at schools and at homes. People working with them are in contact with embedded geometry. Screen are formed from dots, lines, different kind of geometrical shapes etc. The existing visual software offers natural possibilities for making geometrical transformations and exploring relationships. The world seems out to be geometrical to the computer users when looking at it through the lenses of computer screens. Will this new artificial world also transmit geometrical knowledge to the user? Will the experiencies in the computer environment support learning of school geometry, too?

The problem can be connected to the wider perspective of the cultural significance of computing. Some researchers see clearly computers as

technology which can effectively support transmitting of scientific culture. Following quote of Seymour Papert's book describes well that argumentation from the perspective of child and computer(Papert 1980):

> "In my vision, the child programs the computer and
> in doing so, both acquires a sense of mastery over
> a piece of the most modern and powerful technology
> and establishes an intimate contact with some of
> the deepest ideas from science, from mathematics
> and from the art of intellectual model building."

Papert sees programming(of Logo) as an application of mathematics and sciencies in the same way as technology has been in relationship with physics or chemistry. If Papert's arguments of the significance of computing concerns also of learning of geometry, one can ask, will computing also support development of geometrical structures and models of thinking in pupil's minds. How general the above claim is? What kind of environments we should think, if we want to develop the conceptual and structural understanding of geometry within our pupils?

Computer learning environments for school geometry

Generally school software consists of tutors, games, simulations, tools and programming languages. Different software supports reaching of different aims in learning. Tutors are usually constructed for learning of specific concepts or skills. They are seldomly suitable for developing problem solving abilities. Instead of them simulations, tools and also programming languages could be used except in concept learning but also in problem solving and development of thinking. One reason for all this is that different software is based on different viem of learning. As we know well tutors are (still) representatives of programmed learning in computer environment

If we accept for our starting point the conception of learning where pupils are seen active, offered material processed, constructed and reconstructed human beings, which has also own theories and models of concepts and phenomena which they are waited to learn(Anderson 1982), tools and

programming languages are possible mediums for learning. In the following it is analyzed how some examples of them could be used in geometry learning.

Designing software

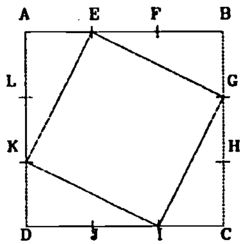
Designing software(Windows Draw!, Designer etc.) offers possibilities to do geometry on a powerful way. It is possible to rotate, translate, reflect, expand and shrunk the constructed figure. All these operations have been traditionally as contents in our curriculum of school mathematics. These CAD-like software make it possible doing geometry and offer also links to applications of learned concepts and operations for instance in technical design and drawing. However one can argue that working in CAD-like environment will not quarantee development of conceptual or structural geometrical thinking in pupil's minds. On the other hand their use and possibilties to emphasize designing in it can eventually develop such intuitive geometrical knowledge, which will help later the learning of genuine geometry.

Geometric Supposers

Geometric supposers are designed for exploring geometrical knowledge(Schwarz 1989). The application domain is plane geometry.Programs emphasize generalising of observed patterns. One of the main purpose of them is to enchance intellectual exploration for finding generality among the chaos. The software include such constructs as parallel, perpendicular, angle bisector etc. As oppose to the tutor-like programs all feedback is subjective and beeing grasped from the results of active exploration. That is one reason why Schwartz names the programs to "intellectual mirrors". They support reflective thinking in the experimenting. One can argue that thinking tools like Supposers can enchance forming of mental models of geometrical phenomena and developing of it. All this can be valuable in developing of structural thinking of geometry among pupil's minds.

Following example is taken from Schwarz article(Schwarz 1989) where he describes the use of Supposer in geometry learning:

Teacher: Consider a square ABCD. Subdivide segment AB into three equal segments AE, EF, FB. Similarly subdivide BC into BG, GH and HC, segment CD into CI, IJ, and segment DA into DK, KL and LA.(See Figure).



Now draw segments EG, GI, IK and KA. What interesting things can be said about the quadrilateral EGIK? After that students begin to explore the situation. Some of them are interested about areas of figures and more presicely their ratios. Some may suggest that the ratio will be 9/5. The proof could be found by drawing lines EJ, FI, GL and HK.

After above investigation teacher can suggest another problem: Suppose one had'nt subdivided the sides of original square into 3 equal parts but rather into 4? Into 5? Would the resulting quadrilateral still be a square? What would be now the ratio of the areas?

After the explorations the teacher can then suggest generalization of the results for
triangels, pentagons etc.

(Main menu of the software consists of the items:DRAW, MEASURE, LABEL, SCALE, ERASE, REPEAT and SHAPE):

Logo

Until now Logo stands for one of the few programming languages designed for learning. It belongs to LISP-family being one of its dielects. It emphasizes procedural knowledge(Know how) (compared declarative knowledge(Know what)). It has built in content, which makes it interesting for school learning. Geometry learning in the Logo environment means moving in the world of Turtle. Language is "object oriented" and its power is based upon features like procedurality, recursivity and possiblity to extend the amount of words the Turtle knows. Logo resembles a lot of Geometrical Supposers at least in one sense. It supports also reflective thinking and gives very gentle and subjective feedbacks(I don't know how to ... f. eg.).

Logo demands to know how to do things. It's geometry is different compared traditional Euclid or analytical geometries. As an example in the following the circle is defined using all these geometries:

1.Euclid circle

"Circle consists of all points which are equidistant from a fixed point, the center".

2. Analytical circle

"The circle is formed from all pair of poits (x,y), such that $(x\text{-}a)^2 + (y\text{-}b)^2 = r^2$, (a,b) being the center."

3. Logo circle

"to circle
repeat 360[forward 1 right 1]
end"

As an opposite of the other geometries Turtle geometry being differential geometry in nature offers a way to think about surroundings of children. At the same time it connects, according to Papert's claim children's experience and mathematics both naturally and powerfully (Papert 1980, 68). But how we should offer Logo to our children so that all above become true? It seems that Logo itself does not necessary quarantee transmitting of the

geometrical knowledge we want to our children without thinking about the used metod(Simon 1987).

Geometry in the Logo-environment

Logo is programming language which has built in geometry. On the other hand it is presented often as one of the best existing example of s.c. microworlds (Lewis 1988). And being AI-language it offers powerful tools for representing ideas during different programming projects both in contents of geometry and processing of language(Harvey 1987).

According to Norton(1985) computer problem solving environment supports naturally synthetic reasoning as an opposite of analytic reasoning which is commonly inside the printed material for problem solving. Although the claim is hypothetical and difficult to proof, is is easily accepted that computers offer powerful tools for the investigation of phenomena qualitatively. Using different kind of simulation software it is possible to explore how the structure of the phenomena interracts qualitatively. That kind of learning could be very valuable if we aim to develop the growth of mathematical structure in student's minds. One can argue that this happens very seldomly in textbook or laboratory oriented learning. Our evident problem is however how to measure the changes in structures of knowledge.

Structural view of learning is valuable in programming computer also in Logo- environment. One can suppose that language itself cannot reveal its features to programmers if they try to go ahead on the self-directed way(see Simon 1987). We need the method. The TOP-DOWN approach in programming can quarantee learning the features of language in an meaningful and relational way. The learned tools can be used later as blocks or bricks for constructing new interesting models of things. The worksheet in APPENDIX A describes an succesful implementation of programming of Logo in KONTI-project.[1)]

In the example the activity starts by using learned procedure as a building block for making different windows. Later pupils define with it new

blocks(column or fence) which they will afterwards use in constructing other teacher suggested "models" of reality.

Microworlds have no single definition(see for instance Squires and McDougall 1986). Abelson et al's definition is only one but descriptive example of them(Abelson et al 1982):

> "A microworld is a computational package that embodies some intellectual theme. To the learner, a microworld may appear as a game, as a set of programs to be run or as a collection of computational building blocks that can be used to construct new programs and games. Often a microworld will have all these attributes. The salient pedagogical charasteristic of a microworld is that it is organised around phenomena rather than around programs."

The parallelogram can act as a goob example of geometrical structure. One possible proposal for microworld in the Logo- environment could be a procedure of it. In the worksheet of APPENDIX B it is presented how this simple microworld can act as a source for many interesting and interconnected explorations. The example below is modified from Hoyles's and Noss's article(Hoyles and Noss 1987).

Working with the microworld takes usually 1-2 lessons for the child. The example is a good example how short and readable procedure gives a lot of possibilities for explorative work and at the same time supports the development of structural aspect of geometrical knowledge. The learned procedure can later function as a tool for experimenting towards generalizing. One can also argue that the phenomena around which the microworld is generated can reveal powerfully charasteristics of the parallelogram through a procedure. The programming of computer can also offer ways to analyze and develop a model from our real environment. This is because the learned contents in the form of procedures can work as tools for our observations and modelling.

One strong way to enchance application of products of programming of Logo are projects. As projects generally they offer chance to construct a

plan, working with the it, evaluate and correct of it since the result is satisfactory. One can estimate that hardly any other learning environment can offer such great potential for emphasization of those general procedural skills. In APPENDIX C it is presented one succesful example of used Logo projects:

In the example the reality is modelled by geometrical and at the same time quite artificial way. However working with it pupils will become familiar with some basic geometrical concepts and shapes and also concepts like continuous time which is used on a very deep way in the example. The project is possible to implement with pupils ten years old or above in average if the pupils know such basic features of Logo as procedurality and recursivity.

Discussion

According constructivistic theory of learning human being is naturally active and simplifier and constructer of the problem situation(Schulman and Rinastaff 1986, Gallagher and Reid 1981). He tries to fit the model he has to the problem and if it does not work, developes it until it will do so. From the learning perspective this means demands of creating learning environments that emphasize structural features of the situation.

One of the well known heuristics for problem solving is Polya's "understanding the problem"(Polya 1957). Its aim is just to evaluate the structure of the problem. One of its subheuristics is also question for self, "Can you remember similar example?". This is helped in the Logo environment by constructing and then naming things. These can then serve later as chuncks in programming procedures needed in prpblem solving situations. By beginning programming activity with becoming familiar with the new procedure and using it as a construct in building new models of things in the world of geometry can naturally support developing of mental models and at the same time structural knowledge of the subject.

Logo microworld can serve as a tool for learning geometrical concepts and their relationship. However free exploration of microworld does not

quarantee learning of the content or the structure. We have to direct the activity so that pupil's have real possibilities to find out patterns in the explorations and work towards generality as was done in the quadrangle microworld of APPENDIX B.

In the computer and microworld environment pupils usuallly go through many examples which belong to the same concept or structure.It is probable that the activity helps in remembering of concepts. It is also argued that just working in the visual-spatial world of examples helps later to remember the examples which belong to the concept needed in problem solving.

The succesful organizing of Logo activities towards developing of geometrical structures and thinking demands a new role for the teacher. We will need teachers who trust to process-centered learning , know enough Logo and its possibilities and who can work as guides in the learning situation. All this is not easy to become true. We need also some more. In the Logo activity the teacher has to emphasize general problem solving skills such as planning, experimentation, degugging and reflection of the products, reformulation of the problem etc. It is argued that Logo offers one highly interractive and meaningful environment for doing that. After then we can expect that there will also be suggested positive changes in children's thinking(see for instance Clements 1985, Klahr and Carver (1988) and Enkenberg 1989).

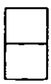
1) KONTI-project is a joint project between University of Joensuu(Faculty of Education) and municipality of Kontiolahti . Its main porpose has been to integrate computer use in learning on all grades of primary schools of one municipality. The main objective in computer use has been to emphasize problem solving, thinking and project work in learning. Logo has been one of the most important software which have used in experiment and development work.

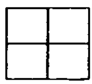
APPENDIX A An example of worksheet used in programming of LOGO.

1. Think of how you can construct following windows consisted of 2 and 4 panes using SQUARE–procedure.

```
TO SQUARE
REPEAT 4[FD 40 RT 90]
END
```

Put results into your notebook. Experiment with your procedures.



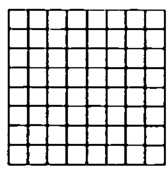


2. How could you get (using SQUARE–procedure)

a) "column"

b) "fence"

3. Following task is challenging.
Plan a procedure which draws a chess board on the screen by one word



Can you colour the chess board?

APPENDIX B The quadrangle microworld.

1. Tell FIG-word to LOGO.

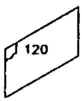
```
TO FIG :SIDE1 :SIDE2
FD :SIDE1 RT 30
FD :SIDE2 RT 150
FD :SIDE1 RT 30
FD :SIDE2 RT 150
END
```

Explore it as follows:

```
FIG 60 140
```

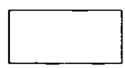
Explore it with other values of SIDE1 and SIDE".
What you get?

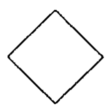
2. Plan a procedure which draws the figure below. Experiment with it(use FIG-procedure as a starting point).

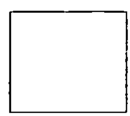


3. Plan the procedures which will produce figures below. Experiment with them. Make summary of them in your notebook.

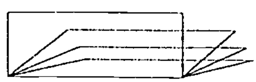
a) 

b) 

c) 

d) 

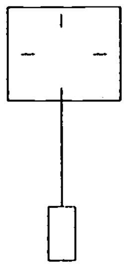
4. Following task is demanding.
Plan the procude which produces figure below.
Experiment with it!



APPENDIX C

WALL CLOCK–project

Plan a procedure, which produces right–angled wall clock.



Explore also, could you get moving pointers to the clock.

Make your clock go as exactly as it is possible.

How could you get your clock into three–dimensional shape.

References:

Abelson et al(1982) Excellence in Educational Computing. Unpublished MIT Memo.

Anderson J.R.(1982) Acquisition of Cognitive Skill. Psychological Review. 89.369-406.

Clements D.(1985) Research on Logo Education. Computers in the Schools. Vol 2. N:o 2. 55-71.

Enkenberg J.(1989) Computers in Education, Thinking and Development of Thinking in Logo Environment. University of Joensuu. Publications of Education. N:o 8.

Hoyles C., Noss R.(1987) Children Working in the Structural Environment. From Doing to Understanding. Unpublished manuscript.

Klahr D., Carver S.(1988) Cognitive Objectives in a Logo Debugging Curriculum: Instruction, Learning and Transfer. Cognitive Psychology. Vol 20. 362-404.

Lewis R.(ed.)(1988) Learning through Microworlds. Seminar report. ESRC occasional paper. ITE/2/88. University of Lancaster.

Norton P.(1985) Problem-solving Activities in a Computer Environment: A Different Angle of Vision. Educational Technology. October 36-41.

Papert S.(1980) Mindstorms: Children, Computers and Powerful Ideas. New York:Basic Books.

Polya G.(1957) How to Solve It? Priceton University Press.

Schulman L., Rinastaff C.(1986) Current Research in the Psychology of Learning and Teaching. NATO ASI Series Vol F 23. In Bork A., Weinstock H.(eds.) Designing Computer-Based Learning Materials. Heidelberg:Springer-Verlag.

Schwarz J.(1989) Intellectual Mirrors: A Step in the Direction of Making Schools Knowledge-Making Places. Harvard Educational Review. 42. 51-61.

Simon T.(1987) Claims for Logo- What We Should Believe and Why? in Rutkowska S., Crook C.(eds) Computers, Cognition and Development. Suffolk:John Wiley.

Squires D., McDougall A.(1986) Computer-Based Microworlds-A Definition to Aid Design. Computers in Education. Vol 10. N:o 3. 375-378.

Anna Maria Fraedrich (Ludwigsburg, BRD)

FLÄCHENAUSLEGEN IN KLASSE 1/2

Zusammenfassung

Im ersten Teil des Referats werden einige Gründe genannt, die für eine propädeutische Behandlung des Flächeninhalts in der Grundschule sprechen: Schwierigkeiten der Schüler in den Sekundarstufen mit dem Flächeninhaltsbegriff (vgl. [6], [7]), die Notwendigkeit von Vorerfahrungen zu den Begriffen Fläche und Randlinie einer Figur bzw. Flächeninhalt und Umfang dieser Figur (vgl. [1], [4], [6], [10]), die didaktische Stufenfolge zur Einführung in den Größenbereich der Flächeninhalte (vgl. [4], [5], [8], [9]).

Im zweiten Teil werden sodann zwei Unterrichtsbeispiele zum Flächenauslegen in Klasse 1/2 vorgestellt: Im ersten Fall geht es dabei um eine Einführungsstunde zum Flächenauslegen überhaupt, d.h. es werden vor allem Erfahrungen zu den ebenen Grundformen und Vertrautheit im Einpassen entsprechender Formenplättchen angestrebt. Im zweiten Beispiel werden hingegen erste Möglichkeiten vermittelt, um Figuren durch Auslegen mit Plättchen nach ihrem Flächeninhalt zu vergleichen.

A. Vorbemerkungen

1. Gründe für eine propädeutische Behandlung des Flächeninhalts in der Grundschule

a) Hinweis auf die Schwierigkeiten von Schülern der Sekundarstufen mit dem Flächeninhaltsbegriff

- Mangelnde Ausbildung von Flächenvorstellungen aufgrund der Liniendominanz ebener Figuren.
- Ungenügende Vorstellungen von der Größe einer Fläche und zu wenig Einsicht in das Prinzip der "Flächeninvarianz" (vgl. [2]), das die Unabhängigkeit der Flächengröße von Figuren gegenüber bestimmten Formänderungen und gegenüber Zerlegungsänderungen beinhaltet.
- Keine Vorstellung von den konventionellen Flächeneinheiten (z.B. 1 cm^2, 1 m^2,...).
- Keine Einsicht in die Umwandlungsregeln (z.B. 1 dm^2 = 100 cm^2).
- Mangel an Vorerfahrungen aus Alltag und Umwelt: Im Alltag werden Flächeninhalte nicht gemessen, sondern aus gemessenen Längen berechnet.
- Verwechslung von Fläche und Randlinie bzw. von Flächeninhalt und Umfang.
- Zu frühe Einführung von Berechnungsformeln ohne ausreichende Einsicht in den konkreten Meßvorgang.
- Rein mechanisches Anwenden von Berechnungsformeln ohne Einsicht in deren Struktur und geometrische Interpretation.
- Keine korrekte sprachliche Unterscheidung von "Fläche" (= Punktmenge) und "Flächeninhalt" (= Größe dieser Fläche).

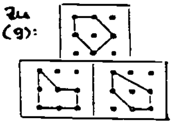
b) Notwendigkeit von Vorerfahrungen zu den Begriffen "Fläche" und "Randlinie" einer Figur bzw. "Flächeninhalt" und "Umfang" dieser Figur

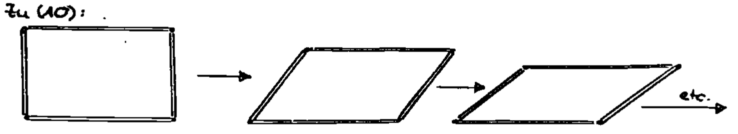
Erste Begriffsklärung:

Umfang = Länge der Randlinie einer Figur; diese kann man mit dem Finger nachfahren.
Flächeninhalt = Größe der Fläche einer Figur; diese kann man mit der flachen Hand bestreichen.

Zur Ausbildung von Vorstellungen sind konkrete Beispiele aus der Umwelt des Kindes erforderlich. Beispiel: Bei einer Wiese repräsentiert das Gras die Fläche, der Zaun die Randlinie; der Heuertrag ist ein Maß für den Flächeninhalt, die Zaunlänge stellt den Umfang dar.

Weitere Aktivitäten zur Unterscheidung von Fläche und Randlinie bzw. von Flächeninhalt und Umfang: (1) Fläche und Randlinie einer Figur mit verschiedenen Farben anmalen. (2) Flächen ausschneiden und zum Bekleben, Falten, Figuren-Auslegen,... verwenden. (3) Figuren mit Plättchen legen und das Ergebnis durch Umfahren der Plättchen aufzeichnen. (4) Zeichnen von Figuren mit der Schablone und anschließendes Ausmalen. (5) Legeaufgaben mit Streichhölzern.
(6) Legen von flächeninhaltsgleichen Figuren verschiedener Form (z.B. Quadratfünflinge).
(7) Zeichnen verschiedener Rechtecke mit demselben Flächeninhalt und Ermittlung der Umfänge.
(8) Zeichnen verschiedener umfangsgleicher Rechtecke und Berechnung der Flächeninhalte.
(9) Erzeugung inhaltsgleicher Figuren mit verschiedenen Formen und unterschiedlichen Umfängen auf dem Geobrett. (10) Einsatz von beweglichen Modellen wie z.B. Gelenkvierecken: hiermit z.B. Demonstration umfangsgleicher Vierecke, deren Flächeninhalt beliebig klein gemacht werden kann.





c) Hinweis auf die didaktische Stufenfolge zur Einführung in den Größenbereich der Flächeninhalte

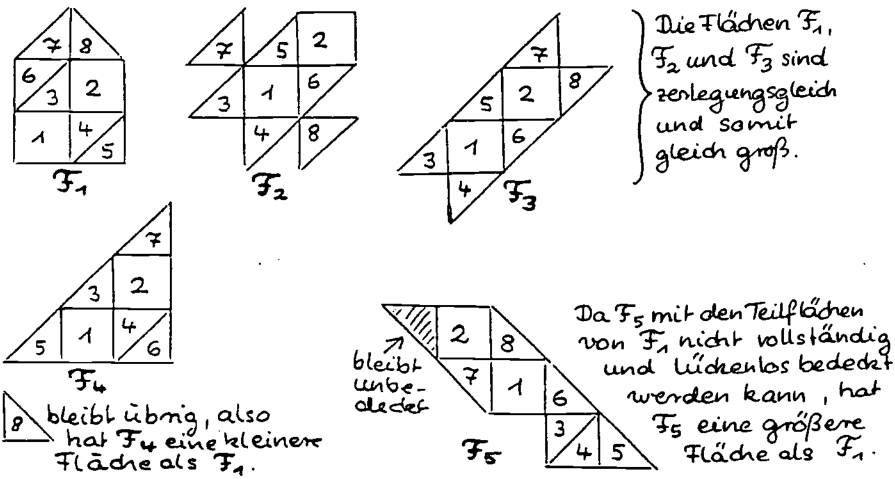
(1) Ausbildung von Vorstellungen zu den Begriffen "Fläche" und "Flächeninhalt" durch Heranziehung kindgemäßer Konkretisierungen. Beispiele: Tischdecke und Stoffbedarf dafür, Seitenflächen iner Schachtel und Bedarf an farbigem Papier zum Bekleben, Teile eines Lebkuchenhauses und größe der betreffenden Lebkuchenportionen, Zoogehege und Platz für die Tiere darin, Parkplatz und Anzahl der Stellplätze darauf, ...

Zu dieser Stufe zählen auch das Legen von Figuren mit Plättchen und das Auslegen vorgegebener Figuren mit Plättchen, wobei es noch nicht um Flächeninhaltsvergleich geht, sondern um das bloße Auffinden von Flächenauslegungen (gemäß der "Idee des Passens").

(2) Qualitative Flächeninhaltsvergleiche, wobei die Zerlegungsgleichheit das entscheidende Kriterium für das Vorliegen flächeninhaltsgleicher Figuren ist. Bei konkret vorgelegten Flächen geschieht dieser Größenvergleich

- durch einfaches Übereinanderlegen,
- durch Zerschneiden und Umlegen von Teilfiguren,
- durch Auslegen mit geeigneten Plättchen,
- durch zeichnerisches Zerlegen in geeignete Teilfiguren.

Beispiel:



Mit derartigen Aufgaben soll vor allem die Einsicht in das Prinzip der "Flächeninvarianz" gefördert werden: Flächeninhaltsgleiche Figuren können sehr unterschiedlich geformt sein; außerdem hängt der Flächeninhaltsvergleich mehrerer Figuren nicht von der Auslegung ab.

Ferner sei angemerkt, daß Erwachsene sehr wohl in der Lage sind, eine solche Aufgabe des Flächeninhaltsvergleichs durch Auslegen mit Plättchen auf der Vorstellungsebene zu lösen; Grundschulkinder können dies i.a. noch nicht leisten: Denken ist nach Piaget nichts anderes als verinnerlichtes Handeln!

(3) Quantitativer Flächeninhaltsvergleich von Figuren durch Ausmessen mit passend gewählten "Einheitsflächen" (z.B. Rechtecken, Quadraten, Dreiecken). Jetzt werden die zu vergleichenden Flächen mit derselben Plättchensorte ausgelegt (bzw. dank einer Materialliste ausgelegt gedacht), so daß ein zahlenmäßiger Vergleich der Flächeninhalte möglich wird. Die Schüler machen hierbei u.a. die Erfahrung, daß und wie die Anzahl der zum Auslegen einer Fläche benötigten Plättchen davon abhängt, wie groß die Plättchen sind.

(4) Hinweis auf die weiteren Stufen: Mittelbarer Vergleich von Flächeninhalten durch Ver- [illegible]h von Hilfsgrößen, Flächenmessung mit Hilfe der konventionellen Flächeneinheiten, Be- [illegible]ung von Flächeninhalten.

B. Zwei Unterrichtsbeispiele zum Flächenauslegen in Kl. 1/2

1. Eine Einführung in das Flächenauslegen mit Formenplättchen in Klasse 1

a) Vorüberlegungen

- zur Themenwahl: Eine Thematisierung des Begriffs "Flächeninhalt" ist nicht angestrebt. Beim Auslegen von Figuren mit den verwendeten Plättchen ("matema-Formenspiel", Schroedel-Verlag) sollen vor allem Erfahrungen zu den ebenen Grundformen gemacht bzw. vertieft werden; es kommt vor allem darauf an, welche Plättchen gut zusammenpassen und lückenlos aneinandergelegt werden können. Dabei wird auch zu genauem und sorgfältigem Arbeiten sowie zu vorausschauendem Denken erzogen.

- zur Konzeption: Da es sich um die letzte Mathematikstunde vor den Weihnachtsferien handelt, wird als Einkleidung eine weihnachtliche Geschichte gewählt, in deren Verlauf Sternvorlagen mit "matema"-Formenplättchen auszulegen sind.

Aus Platzgründen können die beiden Stunden hier nur in Stichworten geschildert werden, wobei jeweils Einkleidung bzw. Veranschaulichung und methodisch-didaktischer Kommentar einander gegenüberstehen.

b) Zum Unterrichtsverlauf

(1) Einstieg mit Geschichte von der fünfjährigen Renate, die bei ihrem Bruder Plättchen findet und daraus Weihnachtssterne legt.

Zum Kennenlernen der "matema"-Formenplättchen legt jeder Schüler damit ein oder zwei Sterne.

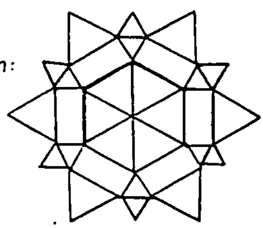
(2) Renate hat bei ihrem Bruder drei Sternvorlagen gefunden, schafft aber das Auslegen nicht ganz.

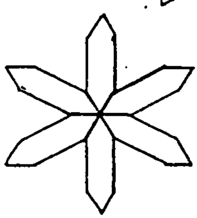
Die Sternvorlagen werden nun von den Schülern mit geeigneten Plättchen ausgelegt.

Dabei Steigerung des Schwierigkeitsgrades: Bei der 1.Sternvorlage ist die Flächeneinteilung vollständig, so daß die Plättchen nur einzupassen sind; bei der 2. und 3. Vorlage ist die Flächeneinteilung nicht mehr vollständig, wobei die 3.Vorlage eine zusätzliche Schwierigkeit aufweist: Die gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke müssen in unterschiedlicher Lage eingepaßt werden.

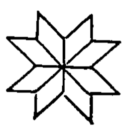
Eine Berücksichtigung der Formsymmetrie bei der Farbgebung wird nicht verlangt, von den Kindern aber in der Regel angestrebt, um einen besonders "schönen" Stern zu erhalten.

1. Stern:





2. Stern

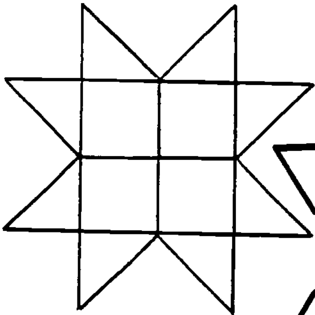


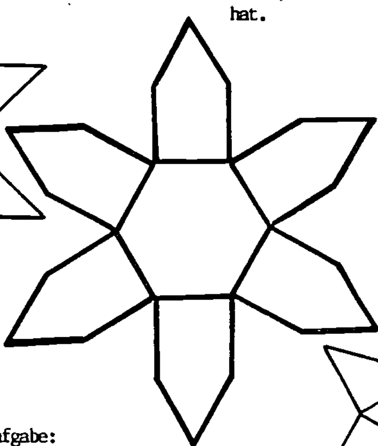
3. Stern

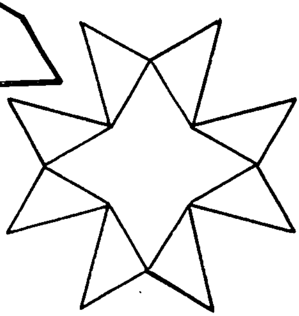
(3) Renate hat von ihrem Bruder erfahren, wie man solche Sternvorlagen selber herstellen kann. Sie hat mit ihrem Bruder eine Reihe vor Sternvorlagen aufgezeichnet:

Die Schüler bearbeiten mehrere Arbeitsblätter, wobei die Sternvorlagen zunächst eine vollständige Flächeneinteilung aufweisen, später nicht mehr.

Eine gemeinsame Kontrolle der einzelnen Aufgaben ist nicht erforderlich, da ein fertig ausgelegter Stern dem Kind bereits signalisiert, daß es die Aufgabe richtig bearbeitet hat.



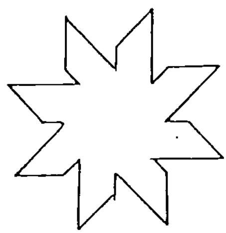




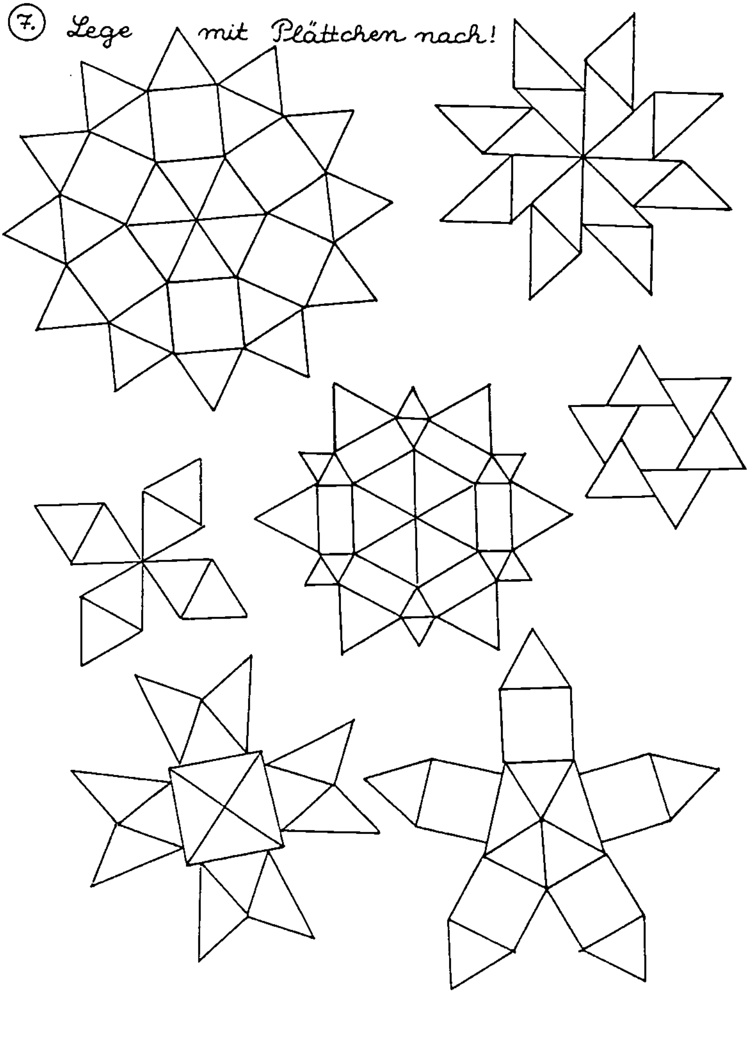
(4) Freiwillige Hausaufgabe: Ausmalen und Ausschneiden der Sterne auf den Arbeitsblättern und Verwendung als Weihnachtsgeschenk

c) Hinweis auf Fortsetzungsmöglichkeiten

- Weitere Steigerung des Schwierigkeitsgrades durch Vorlage von Sternvorlagen in verkleinertem Maßstab: Die Vorlagen können nicht mehr ausgelegt, sondern nur mehr nachgebaut oder mit einer Schablone nachgezeichnet werden. Ein Beispiel für ein derartiges Arbeitsblatt ist auf der nächsten Seite angegeben.
- Auslegen von Figuren, die nur noch durch ihre Randlinien gegeben sind ("Umrißfiguren"). Ein Beispiel zeigt die Abbildung rechts.
- Erstellen und Auslegen neuer Sternvorlagen im Kunstunterricht (Prinzip des fächerübergreifenden Unterrichts)



7. Lege mit Plättchen nach!



2. Eine Einführung in das Arbeiten mit Materiallisten in Kl.2

a) Vorüberlegungen

- zur Themenwahl: Die Schüler sollten eine Möglichkeit kennenlernen, um mit Hilfe einfachster Materiallisten Flächeninhaltsvergleiche durchzuführen.

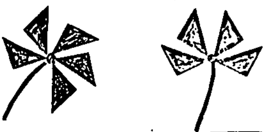
- zur Plättchenauswahl: Wegen des Einführungscharakters der Stunde Beschränkung auf zwei Typen: ▨ und ◺ . Die Erkenntnis 1▨ = 2◺ gestattet eindeutige Entscheidungen zum Flächeninhalt, wenn die Auslegung zweier Flächen bekannt ist.

- zur Konkretisierung des Begriffs "Flächeninhalt": Die zu vergleichenden Flächen werden als Blätter bzw. Blüten interpretiert, welche zwei Äffchen als Mahlzeit erhalten.

- zur Konzeption: Da die Einkleidung zum Schulfest-Thema "Urwald" passen sollte, wurde eine Geschichte von den beiden Affenkindern Toto und Titi erzählt.

b) Zum Unterrichtsverlauf

(1) Einstieg mit der Geschichte von Toto und Titi, die im Urwald leben und sich von Blättern und Blüten ernähren. Dabei ist stets zu beachten, daß Toto als der Ältere mehr zu essen bekommt als das Affenmädchen Titi.

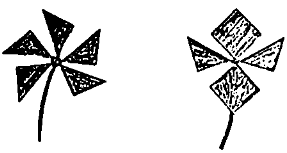


5 ◺   4 ◺

Beim 1.Beispiel werden zwei Zweige mit lauter gleichgroßen Blättern vorgelegt: Die Anzahl ist dafür entscheidend, welchen Zweig Toto bzw. Titi bekommt.

Der abstrakte Begriff "Flächeninhalt" wird hier durch das Blattfutter für die Äffchen konkretisiert: Mehr Futter bedeutet hier mehr Blattmaterial.

(2) Bei der nächsten Mahlzeit sind die nachstehenden Zweiglein richtig zu verteilen. Titi will die Entscheidung wieder nur durch Abzählen der Blätter herbeiführen. Toto ist damit nicht einverstanden.



0 ▨ 5 ◺   2 ▨ 2 ◺

Die Schüler lernen hier ein erstes Beispiel für einen Flächeninhaltsvergleich kennen, bei dem nicht nur die Anzahl der zum Auslegen benötigten Plättchen entscheidend ist, sondern deren Größe.

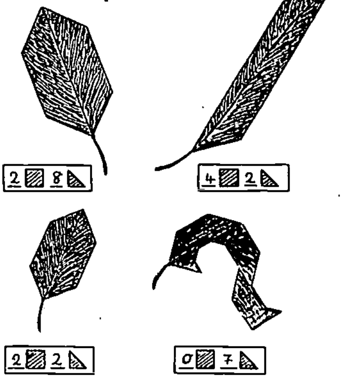
An diesem Beispiel, bei welchem das Auslegen der Blattflächen mit Plättchen noch problemlos durchzuführen ist, wird die folgende Strategie zum Vergleich von Flächeninhalten erarbeitet:

1.Schritt: Auslegen der Flächen mit Plättchen der beiden vorliegenden Typen ▨ und ◺ .

2.Schritt: Erstellen einer entsprechenden Materialliste | _ ▨ _ ◺ |

3.Schritt: Vergleich der beiden Flächeninhalte, gegebenenfalls durch Ausnützen der Beziehung 1▨ = 2◺ .

(3) Vertiefung mit dem 3. und 4. Beispiel, als weitere Mahlzeiten von Toto und Titi interpretiert.



Bei diesen Beispielen sind die aufgemalten Blätter nur mehr Umrißfiguren, deren Auslegung erst noch zu finden ist; die Schüler sehen also nicht mehr sofort, wie eine Auslegung begonnen werden kann.

Außerdem sind Schwierigkeiten beim Einpassen der dreieckigen Plättchen zu erwarten, die sich ja auf zwei Arten in einen 45°-Winkel einpassen lassen:

so:  oder so: 

Schließlich sind die Beispiele so gewählt, daß der Flächeninhaltsvergleich nicht durch bloßes Anschauen und Abschätzen von den Schülern geleistet werden kann. So wird die Leistungsfähigkeit des in (2) erarbeiteten Verfahrens bewußt gemacht.

(4) Zum Nachtisch bekommen die Affenkinder oft Blüten, wobei auch hier die Regel gilt, daß Toto die größere Portion erhält.

Verkleinerte Kopien der Arbeitsblätter finden sich auf der nächsten Seite.

Drei Arbeitsblätter mit Blüten (passend zum "matema"-Formenspiel) werden nacheinander bearbeitet, wobei das erste Blatt mit gelber und roter Farbe koloriert ist. Die von den Schülern gefundene Auslegung wird jeweils mit Bleistift eingezeichnet (zur Kontrolle).

Während die Blüten auf dem 1.Arbeitsblatt nur mit Dreiecken auszulegen sind, gestatten die beiden anderen Arbeitsblätter unterschiedliche Auslegungen, wobei auch die Farbgebung von den Schülern selbst gewählt wird.

Bei der Besprechung muß auf die unterschiedlichen Auslegungen eingegangen werden, um daran zu verdeutlichen, daß das Ergebnis des Flächeninhaltsvergleichs nicht von der Art der Auslegung abhängt.

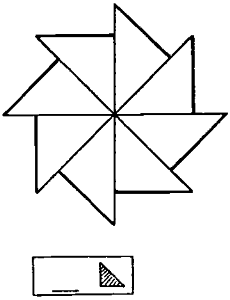
(5) Hausaufgabe: Ausmalen der Blüten auf dem 2. und 3.Arbeitsblatt mit roter und gelber Farbe.

Ausmalen geometrischer Grundformen führt mit dazu, ein Gefühl für diese Formen (für gleichlange bzw. verschieden lange Seiten, für Winkel verschiedener Größe) zu bekommen.

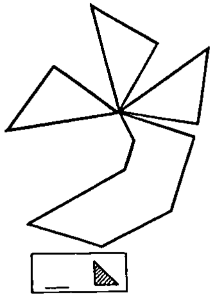
c) Hinweis auf Fortsetzungsmöglichkeiten

- Erweiterung der Materiallisten durch Einbeziehung weiterer Plättchensorten.
- Im Kunstunterricht Erzeugung weiterer Blätter und Blüten aus geometrischen Grundformen mit Hilfe einer Schablone.
- Weitere Aktivitäten mit Materiallisten, wobei u.a. die Erfahrung gewonnen wird, unter welchen Bedingungen ein Flächeninhaltsvergleich mit Hilfe von Materiallisten möglich ist.

(1)

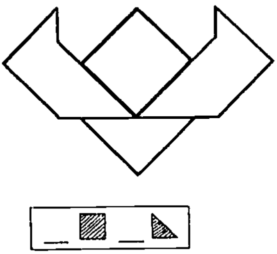


Diese Blüte
ist für T____.

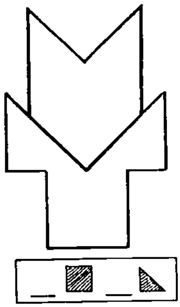


Diese Blüte
ist für T____

(2)

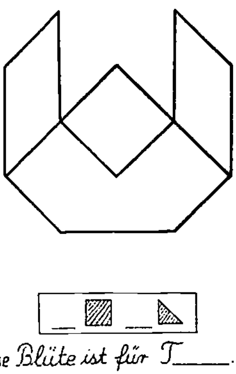


Diese Blüte ist für
T____.

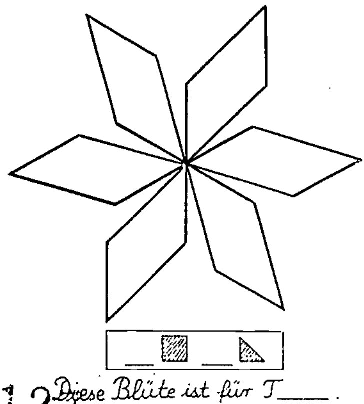


Diese Blüte ist für
T____.

(3)



Diese Blüte ist für T____.



Diese Blüte ist für T____.

Literatur

[1] Aebli, H.: Psychologische Didaktik (Klett-Verlag Stuttgart 1970⁴)

[2] Bauersfeld, H.: Einführung in das Formenspiel (Schroedel-Verlag Hannover 1972)

[3] Breidenbach, W.: Raumlehre in der Volksschule (Schroedel-Verlag Hannover 1966¹²)

[4] DIFF-Kurs: Mappen E 16 (Einführung in geometrische Begriffe) und HE 6 (Berechnungen an ebenen und räumlichen Figuren) (Tübingen 1974 bzw. 1981)

[5] Glück, J. / Hagmair, G. / Steinmann, J.: multi 1 - 4 (alt) mit den zugehörigen Lehrgangsbänden (Konkordia-Verlag Bühl/Baden)

[6] Krauter, S.: Lehrerbände zu Mathematik 5, 6 und 7, Ausgabe B (Mildenberger-Verlag Offenburg 1984, 1985 bzw. 1986)

[7] Schwach, G.: Die Mathematikkenntnisse von Hauptschulabsolventen... In: Math. Unterrichtspraxis 1980

[8] Vollrath, H.J.: Geometrie: Didaktische Materialien für die Hauptschule (Klett-Verlag Stuttgart 1982)

[9] Vollrath, H.J.: Methodik des Begriffslernens im Mathematikunterricht (Klett-Verlag Stuttgart 1984)

[10] Winter, H.: Was soll Geometrie in der Grundschule? In: Zentralblatt für Didaktik der Math. 1976

Anna Maria Fraedrich (Ludwigsburg, BRD)

KÖNIG SENKRECHT IV. UND SEIN REICH

Ein Unterrichtsbeispiel für Klasse 4/5 zum Thema "Rechteck und Quadrat"

Zusammenfassung

Es wird über eine dreistündige Unterrichtseinheit berichtet, die in einer vierten Klasse gegen Ende des Schuljahres stattfand. Dabei wurden im wesentlichen die folgenden Ziele angestrebt: (1) Wiederholung und Vertiefung von Rechteck- und Quadrateigenschaften, (2) Umfangsberechnung bei Rechteck und Quadrat, (3) Bestimmung des Flächeninhalts von Rechteck und Quadrat.

Für die Unterrichtseinheit wurde als Einkleidung das Märchen von König Senkrecht IV. und seinem Reich konzipiert. Diese Einkleidung diente nicht nur der Motivation; sie erwies sich auch in folgendem Sinne als tragfähig für die ganze Unterrichtseinheit: Alle anfallenden Probleme konnten im Kontext der Geschichte formuliert und zum Teil auch gelöst werden.

1. Vorbemerkung

Die dem Referat zugrundeliegende dreistündige Unterrichtseinheit wurde in einer vierten Klasse am Ende des Schuljahres durchgeführt. Aus dem vorangegangenen Mathematikunterricht brachten die Schüler folgende Vorerfahrungen zum Thema "Rechteck und Quadrat" mit:

Aus Klasse 1/2: Formqualitäten von Rechteck und Quadrat als Plättcheneigenschaften, Bezeichnungen "Rechteck" und "Quadrat", Erfahrungen beim Auslegen von Figuren, Verwendung von Rechteck- und Quadratfeldern im arithmetischen Bereich.

Aus Klasse 3/4: Erfahrungen im Zusammenhang mit (1) der Untersuchung von Vierecken auf Achsensymmetrie, (2) dem Flächeninhaltsvergleich vorgegebener Figuren durch Auslegen mit Plättchen, (3) der Anwendung des "Faltwinkels" (Prototyp des rechten Winkels in der Grundschule), (4) der Erarbeitung der Relationen "senkrecht zu" und "parallel zu" bei Geraden und Strecken, (5) der Behandlung maßstäblicher Zeichnungen, insbesondere bei der Bearbeitung von Sachaufgaben mit geometrischem Hintergrund, (6) der Behandlung (Untersuchung, Beschreibung, Herstellung) von Quader und Würfel.

Für die Unterrichtseinheit wurde als Einkleidung das Märchen von König Senkrecht IV. und seinem Reich konzipiert (nachempfunden dem "Land der TEIUFANER von R. Stowasser [8]). Einige Anregungen, das Material betreffend, wurden [1] , [2] und [3] entnommen.

2. Zum Verlauf der Unterrichtseinheit

Aus Platzgründen kann die Unterrichtseinheit hier nur in Stichworten geschildert werden, wobei jeweils Einkleidung bzw. Veranschaulichung und angestrebtes Lernziel einschließlich des betreffenden mathematischen Sachverhalts einander gegenüberstehen. Eine detaillierte Beschreibung findet sich in [4] .

1. Stunde: Wiederholung und Vertiefung von Rechteck- bzw. Quadrateigenschaften

(1) Ein Plakat (vgl. Abb.1) zeigt König Senkrecht IV. (großes Quadrat) mit einigen seiner Hofleute (Rechtecke einschließlich kleinerer Quadrate). Als Ordensbänder dienen die eingezeichneten Diagonalen.	Wiederholung der Begriffe "Rechteck" und "Quadrat" nebst einigen bekannten Eigenschaften. Erkenntnis, daß Rechtecke gleichlange Diagonalen besitzen.
(2) Auf zwei weiteren Plakaten (vgl. Abb.2) kommen neben Untertanen (Rechtecken) auch Spione (nichtrechteckige Vierecke mit gewissen Rechteckeigenschatfen) vor, die entlarvt werden müssen.	Erarbeitung der für Rechtecke charakteristischen Eigenschaften. Feststellung, daß jedes Quadrat ein spezielles Rechteck ist.
(3) Bei zwei Untertanen (Quadrat und nicht-quadratisches Rechteck) werden die "Faltachsen" ermittelt.	Wiederholung des Wissens um Lage und Anzahl der Symmetrieachsen bei Rechteck und Quadrat.
(4) Zur Herausgabe einer königlichen Hofzeitung wird ein Zeitungsverleger benötigt: Er wird durch Falten hergestellt. Er möchte viele kleine Zeitungsjungen anstellen: Jeder Schüler darf ein Rechteck bzw. ein Quadrat falten (vgl. Abb.3).	Herstellung von Rechtecken und Quadraten aus Papierfetzen, und zwar allein durch Falten. Dabei Feststellung, daß ein Rechteck bereits durch drei "Faltwinkel" (rechte Winkel) festgelegt ist.
(5) Ein Zaubermeister (aus zwei gleichlangen, gegenseitig drehbar gelagerten Holzstäben hergestellt, deren Enden durch ein Gummiband verbunden sind) mit seinen entsprechend gebauten Lehrlingen kommt an den Hof: Alle können sich in ganz verschiedene Untertanen verwandeln, der Zaubermeister sogar in Spione unterschiedlicher Art (vgl. Abb.4).	Erfahrung, daß Vierecke mit gleichlangen Diagonalen nur dann Rechtecke sind, falls sich die Diagonalen gegenseitig halbieren. Einsicht, daß in der Folge dieser Rechtecke mit vorgegebenen Diagonalen genau einmal ein Quadrat vorkommen muß, nämlich dann, wenn die Diagonalen auch noch senkrecht aufeinander stehen.

2. Stunde: Umfangsberechnung bei Rechteck und Quadrat

(6) Die Untertanen von König Senkrecht IV. sollen in Regierungsbezirke eingeteilt werden, und zwar nach ihrem Umfang.	Wiederholung des Begriffs "Umfang" als Länge der Randlinie einer Figur. Erarbeitung von Strategien zur Berechnung des Umfangs von Rechteck (gemäß $U = 2a + 2b$ bzw. $U = 2\cdot(a + b)$) und Quadrat (gemäß $U = 4a$).
(7) Jeweils 5 Schüler erhalten ein Plakat mit der Aufschrift "U 32", "U 40",..., "U 64" als Kennzeichnung des betreffenden Bezirks (vgl. Abb.5). Aus ca. zehn Vierecken müssen zwei Spione entlarvt sowie zwei "Irrläufer" (Untertanen, die zu anderen Bezirken gehören) als solche erkannt werden, indem für jeden Untertan der Umfang bestimmt und mit der Plakataufschrift verglichen wird.	Wiederholung der für Rechtecke charakteristischen Eigenschaften. Einübung der Verfahren zur Umfangsberechnung (als Strategie, nicht als Formel!!). Erfahrung, daß sehr unterschiedlich geformte Rechtecke denselben Umfang besitzen können.
(8) Eine zweite Zauberergruppe, bestehend aus Rechtecken gleicher Breite auf einem Arbeitsblatt (vgl. Abb.6), kommt an den Königshof: Nach Zerschneiden und Zusammensetzen in anderer Weise (nach Vorschrift) ist ein Zauberer verschwunden... König Senkrecht IV. setzt eine Belohnung aus für denjenigen, der das Rätsel lösen kann.	Der "Zaubertrick" (dem von Zaubermeister Adrion aus [1] nachempfunden) hat durchaus etwas mit Mathematik zu tun, wird hier aber nicht verraten: Selber denken macht fit!

3. Stunde: Bestimmung des Flächeninhalts bei Rechteck und Quadrat

(9) König Senkrecht IV. läßt aus acht gleichlangen Stäbchen verschiedene Untertanen erschaffen. Die dabei entstandenen Untertanen (vgl. Abb.7) gehören zum selben Bezirk, streiten sich aber, wer mehr wert ist. Nach königlichem Erlaß ist es derjenige, der den größeren Bauch (d.h. die größere Fläche) hat.	Wiederholung, daß verschiedene Rechtecke denselben Umfang haben können. Flächeninhaltsvergleich der beiden gelegten Figuren mit Hilfe von weiteren Stäbchen der verwendeten Art: Das "echte" Rechteck mißt drei "Einheitsquadrate", das Quadrat hingegen vier. Damit auch Erkenntnis, daß umfangsgleiche Rechtecke i.a. verschiedenen Flächeninhalt besitzen.
(10) Für jeden der in (6) eingerichteten Bezirke soll ein Präsident bestimmt werden: nämlich derjenige Untertan des Bezirks, welcher den größten Bauch hat.	Mit Hilfe einer Quadratgitterfolie wird der Flächeninhalt einiger Rechtecke und Quadrate auf den ersten Plakaten ermittelt, und zwar durch Abzählen der "Kästchen". Dabei Entwicklung einer Strategie: Anzahl der Kästchen längs der ersten Seite mal Anzahl der Kästchen längs der zweiten Seite.

(11) Die Plakate aus (7) werden ausgegeben (ohne Spione und Irrläufer): Jede Gruppe muß mit Hilfe einer Quadratgitterfolie die Größe der betreffenden Untertanenbäuche ermitteln und durch Vergleich anschließend den Präsidenten ihres Bezirks herausfinden. Die Schüler stellen überrascht fest, daß sich in jedem der betrachteten Bezirke der Präsident als das entsprechende Quadrat erweist.

Einübung des in (10) erarbeiteten Verfahrens. Aufgrund der Abmessungen der Folie (ein "Kästchen" ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 1cm) wird dabei mit freudigem Erstaunen festgestellt, daß man nur die Seitenmaßzahlen zu multiplizieren braucht, um die Anzahl der Kästchen zu erhalten (vgl. Abb.8).
Erfahrung, daß unter den vorliegenden umfangsgleichen Rechtecken das Quadrat stets den größten Flächeninhalt besitzt.

(12) Für den noch nicht vorliegenden Bezirk "U 60" sollen Untertanen aus kariertem Papier hergestellt werden. Wem gelingt es, den Präsidenten zu erschaffen? Schließlich müssen alle Untertanen des Bezirks "U 60" zum Appell antreten, wobei bei geeigneter Aufstellung die Anwesenheitskontrolle besonders einfach durchgeführt werden kann (vgl. Abb.9).

Herstellung möglichst vieler verschiedener Rechtecke (einschließlich des Quadrats) mit dem Umfang U = 60cm, wobei man sich auf ganzzahlige Seiten a und b beschränken muß.
Erkenntnis, daß man aus einem schon konstruierten Rechteck mit den Seiten a und b durch Übergang zu $a' = a \pm 1$, $b' = b \mp 1$ ein neues erhält.

Erneute Einsicht, daß das Quadrat "nur" ein spezielles Rechteck ist: Beim Aufeinanderlegen aller dieser Rechtecke entsteht eine gleichmäßig ansteigende Treppe, in welcher das Quadrat so zwangsläufig seinen Platz hat, daß es ohne weiteres als spezielles Rechteck akzeptiert wird.

Literatur:

[1] Adrion, A.: Die Kunst zu zaubern, S.284 (Du Mont Buchverlag Köln 1978)

[2] Breidenbach, W.: Raumlehre in der Volksschule (Schroedel-Verlag Hannover 1966[12])

[3] Castelnuovo. E.: Didaktik der Mathematik (Akademische Verlagsgesellschaft 1968)

[4] Fraedrich, A.M.: König Senkrecht IV. und sein Reich. In: Math. Unterrichtspraxis 1986, Heft II, S.9 - 29

[5] Hole, V.: Erfolgreicher Mathematikunterricht (Herder-Verlag Freiburg 1975[2])

[6] Mors, K.: Begründung, Zielvorstellungen und Konzeption eines Geometrieunterricht in der Primarstufe. In: Kuhn, G. u.a.: Mathematik, Naturwissenschaften, Technik in der Primarstufe (Klinkhardt-Verlag 1975)

[7] Stowasser, R.: Extremale Rechtecke - eine Problemsequenz mit Kurzfilmen. In: Math. Unterr. 1976, Heft 3, S.12 ff.

[8] Winter, H.: Was soll Geometrie in der Grundschule? In: Zentralblatt f. Did. d. Math. 1976, S.14 ff.

Abbildungen:

Abb. 1:

König Senkrecht IV. und sein Hofstaat

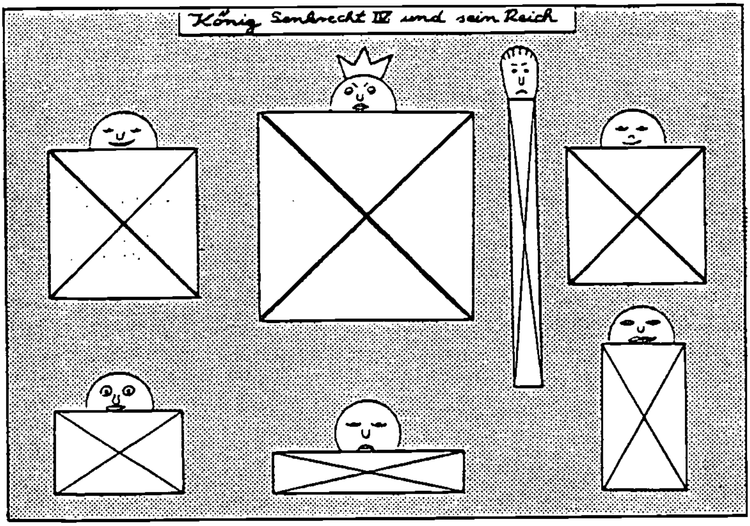


Abb. 2:

Untertanen und Spione in der Umgebung des Hofes von König Senkrecht IV.

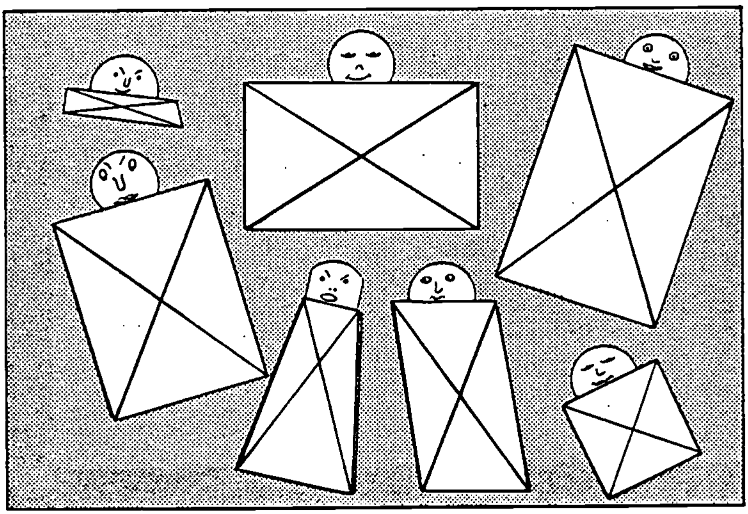


Abb. 3:

Herstellung eines quadratischen Zeitungsjungen nur durch Falten

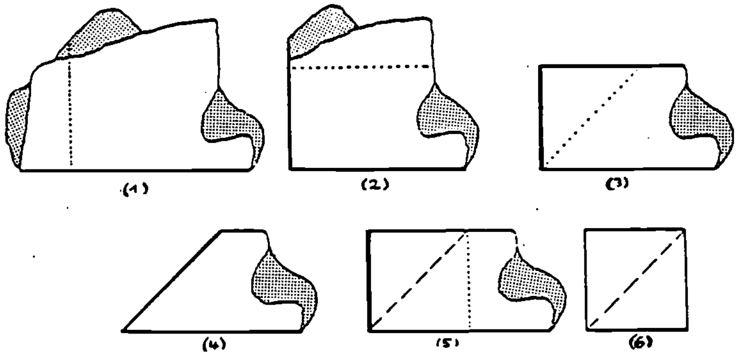


Abb. 4:

Verwandlung des Zaubermeisters aus (5) in Untertanen und Spione

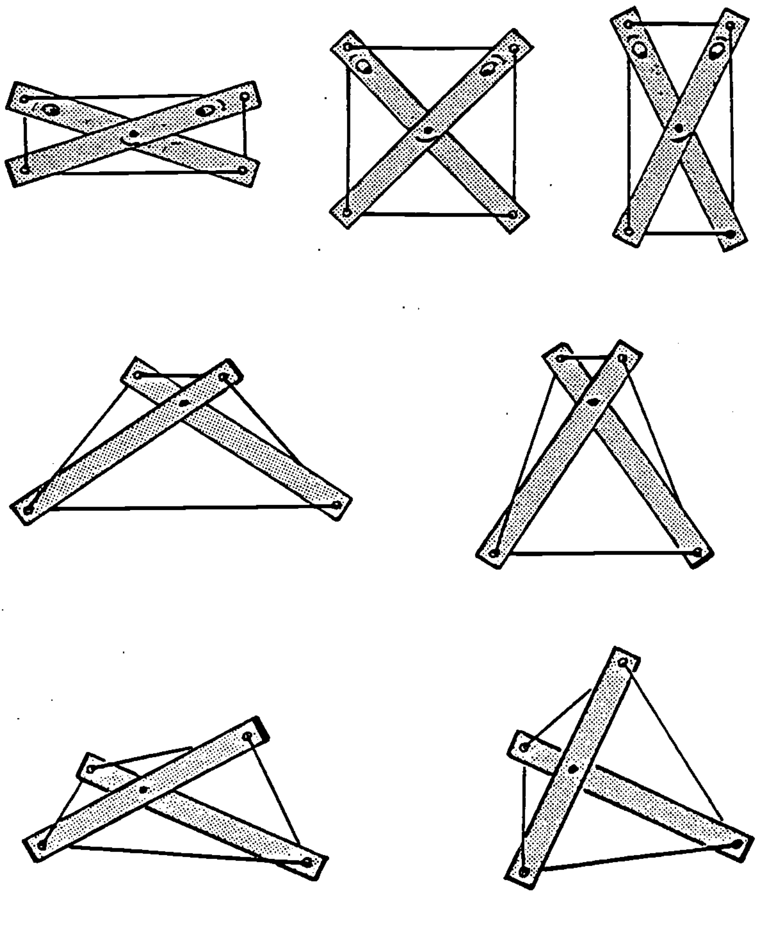


Abb. 5:

Plakat zum Bezirk "U 56" mit zugehörigen Untertanen, Irrläufern und Spionen

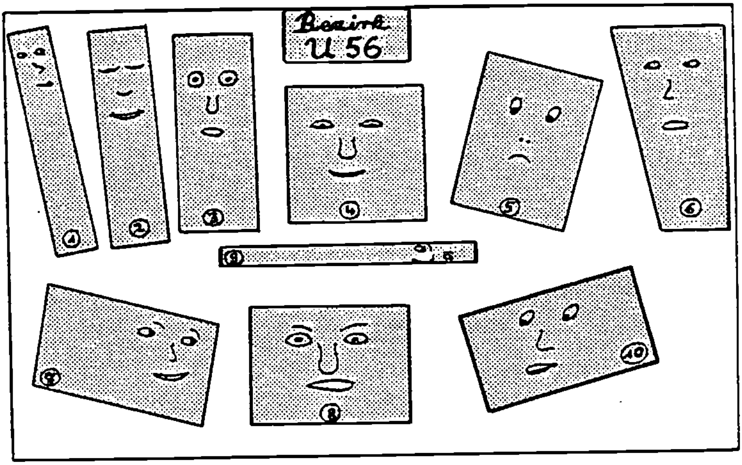


Abb. 6:

Arbeitsblatt mit der zweiten Zauberergruppe

1. Schneide das rechteckige Bild mit den Zauberern aus und zähle sie!
2. Schneide das Bild längs der waagrechten gestrichelten Linie von links nach rechts durch!
3. Schneide den oberen Teil längsder gestrichelten Linie von oben nach unten durch!
4. Vertausche die beiden oberen Teile und lege sie nun auf den unteren Teil. Wie viele Zauberer sind es jetzt?

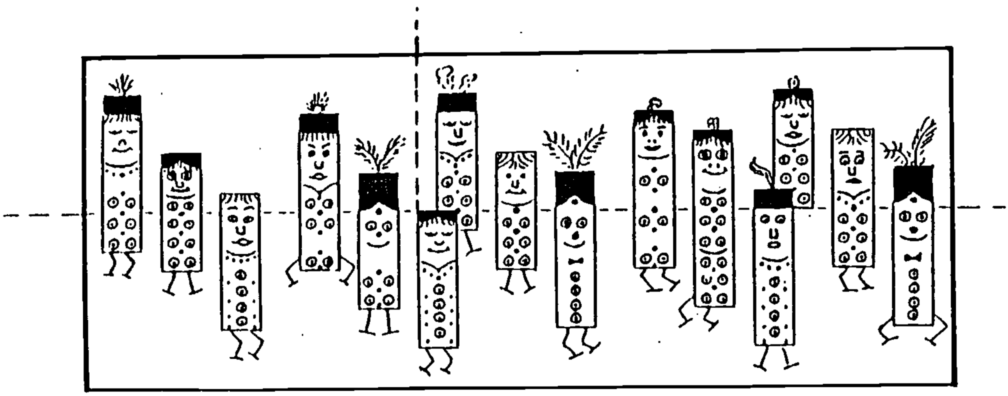


Abb. 7:

Die aus acht Stäbchen gelegten Untertanen und Vergleich ihrer Flächeninhalte

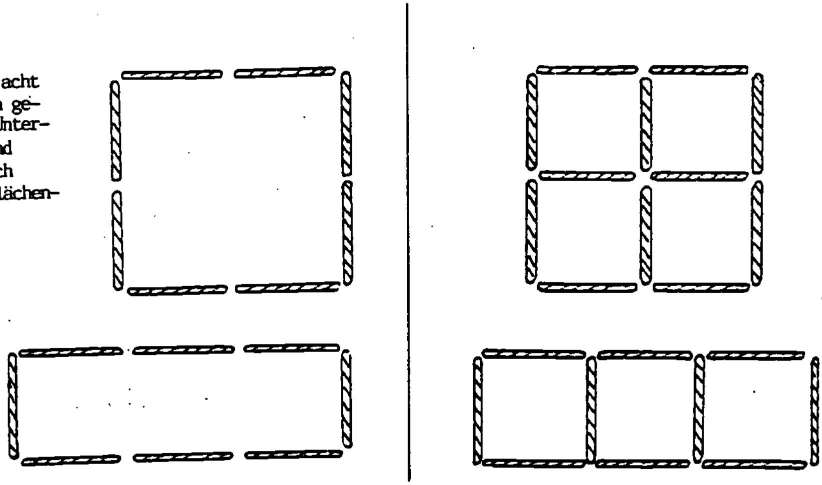


Abb. 8:

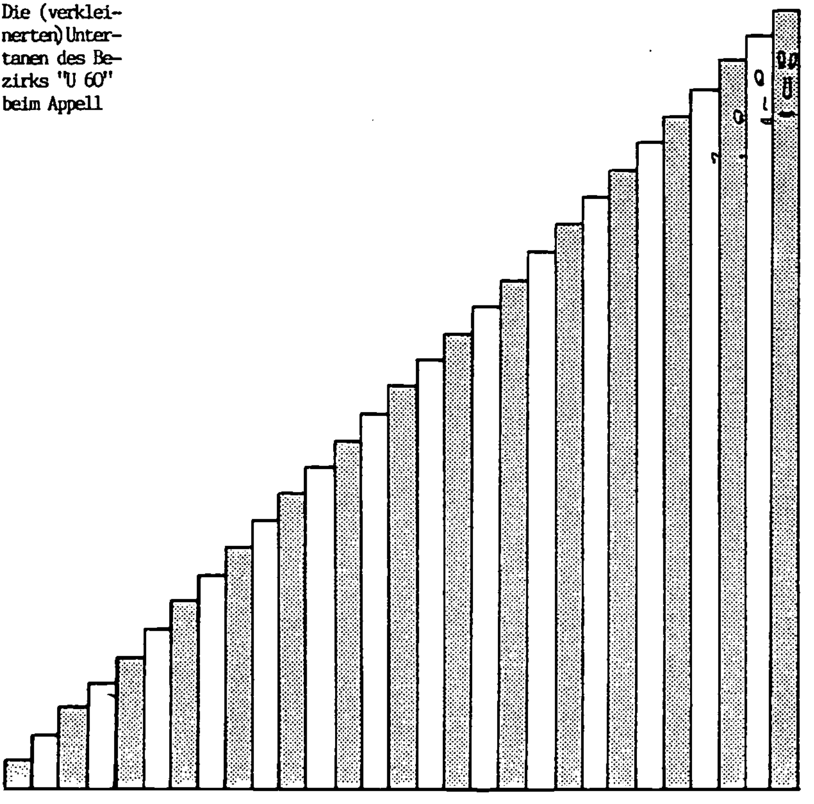
Tabelle mit den Abmessungen und Berechnungen zu den Untertanen des Bezirks "U 56"

Bezirk U 56

	1. Seite in cm	2. Seite in cm	Umfang in cm	Flächeninhalt (Anzahl der Kästchen)
1	23 cm	4 cm	54 cm	—
2	22 cm	6 cm	56 cm	132 K.
3	20 cm	8 cm	56 cm	160 K.
4	14 cm	14 cm	56 cm	196 K.
5	16 cm	12 cm	56 cm	192 K.
6	—	—	—	—
7	—	—	—	—
8	12 cm	16 cm	56 cm	192 K.
9	2 cm	26 cm	56 cm	52 K.
10	10 cm	18 cm	56 cm	180 K.

Abb. 9:

Die (verkleinerten) Untertanen des Bezirks "U 60" beim Appell



Günter Graumann (Bielefeld, BRD)

Problem-Orientated Geometry Teaching With Consideration Of Computers

Summary:

The task of geometry teaching in regular schools cannot be the supplying of scientifical knowledge or the preparation for the study of a special subject like mathematics. That is why I will begin with the explanation of general objectives of geometry teaching at school. After that I will talk about methods of teaching geometry which fit together with these objectives. With this it will come out that no axiomatic way will be suitable, the main point of the method should be rather working on problems.
With such a conception a computer presents a good help. On one hand it can spare drawing work during experimentations with figures and on the other hand it animates to look out for new questions.

In the second part then I will present and discuss several problems as illustration of the before presented conception. Three examples have to do with polygons (shapes of triangles, angles in regular polygons, combinatoric with polygons) and concern mostly the junior secondary school while two examples about curves concern the senior secondary school.

1. General objectives of geometry teaching at regular schools

The aim of mathematics teaching at school cannot be the learning of mathematics for itself. Just so I don't see the task of geometry teaching only in the mediation of geometric knowledge. Also a geometric course which tries to keep on a strong scientifical systematic with a far extending completness of proves is not suitable in my view. On one hand the experiences showed that for pupils an adequate formal course is not practicable and on the other hand with such a course a lot of important general objectives can't be attained.

Therefore I want to talk about general objectives before I begin to talk about ways of geometry teaching at school which promise to be possible and fruitful. The following categorisation of general objectives naturally is only one characterisation of the task of geometry teaching at school and also the categories are not exactly distinct.

(1) <u>Pragmatic orientated objectives</u>
Some *geometrical knowledge and skills* – e. g. as for symmetry, measures of areas and scale-drawings – *are necessary or at least helpful in the everyday world* of each person in our society. And if you see not only the direct personal tasks and problems but also the social ones and the imaginable future tasks and problems of single persons as well as the whole society you will find a lot of geometrical knowledge and skills which should be taught at school. In this view it is important

of course to teach these attainments on basis of solving problems of real life. (More to this topic see G. Graumann 1987 and 1988a.)

(2) On cultural foundation orientated objectives

Besides knowledge and skills which can be used directly each person should have *basic knowledge of the important achievements of the human culture* especially those of our civilization. The comprehension of our world and the ability of forming the future world together with others can't be done well without knowledge about our "roots". (Cf. also Heymann, 1989, p. 5/7 and Kirsch, 1980, p. 231/232).
In respect to geometry teaching this concerns first the role of geometry for the kind of thinking of the old greek, for the change of thinking during the beginning of modern times (especially with Decartes) and for the two thousand years lasting discussion about the axiom of parallels which finally led to the modern way of thinking in mathematics. Secondly with this topic it is concerned the experience that out of pragmatic and vivid reflections the human being can come to pure theoretical questions, as for example reflections about parquetry patterns led to the platon solids or to questions of group theory.

(3) Language and thinking promoting objectives

a) A lot of geometry concepts – like triangle, angle, plane, intersection, symmetry, rotation, cylinder and cube – are not only used in mathematics but also in everyday life. If it is our intension that all people can catch things and relations of the world and can communicate as best as possible then the school has the task to teach the children *founded and differentiated concepts*. Different applications of geometric concepts, different visual characterizations of such concepts and the put out of the practical, technical and theoretical function of geometric forms (cf. Bender/Schreiber, 1985, p. 34 ff.) then are important for geometry teaching.

b) For the development of a versatile set of geometric concepts and of a good spatial faculty of thinking it is necessary to *promote spatial imagination, the ability to discover patterns in complex structures and the ability to mathematizise situations of everday life* with geometric concepts and knowledge. Moreover the ability to *find logical relations and keep on argumentations* also can be trained very good in geometry.

c) In our present and also future world with its complex problems a thinking in narrow, from single sciences preformed ways won't do it any longer; rather *it is important to discuss any theme by different aspects and with many relations to other themes*? In geometry you have often to do with figures which have a lot of aspects and relations to other figures and geometry also has many connexions to other subjects like arts or physics; *therefore geometry teaching is proper to develop a thinking in connexions*. (See also Graumann 1984).

d) Last but not least a good faculty of thinking requires a *general ability of problem solving*. Also for training this ability geometry offers a lot of possibilities.

There exist a lot of problems out of real life as well as out of pure geometry which are understandable and interesting for children and also not to simple.

(4) On critical use of reason and responsibility orientated objectives
A well educated person in my view should keep company with his-/herself and his/her world around so that nobody will be burden immoderate. This means e. g. that you have to estimate the effects of your actions and that you don't overrate your abilities. Just in our world of today - where nearly everything is determined by science and where we already can see the bad effects of extensive utilization of isolated knowledge - it is very important *to show the limitations of mathematizations and the limitation of mathematical reflections* already at school. Hans Werner Heymann in this connexion pointed out that a general education also has to include that you should use your reason critically, i. e. that you don't take statements and judgements as to value without analysis in respect to discrepancies and your own experiences. (See Heymann, 1989, p. 5)
With mathematics education in general and geometry teaching in special you can attain this aim for example if you discuss the mistakes which come out by mathematical modelling. But also the discovery of mistakes in seeming clear proofs can strengthen the critical reasoning if you discuss these mistakes not only in a technical manner. Moreover the discussion about the power as well as the limitation of visual geometric models (as for example the model of atoms of Bohr) can promote the consciousness of the limitation of mathematical thinking.

(5) Creativity, pleasure and self-confidence promoting objectives
We know that children normally work on geometric problems with pleasure because of their visual presentation and possibilities to act concrete and because in geometry the flow of work is not so fixed as in arithmetics. Therefore *geometry courses offer many possibilities to promote creativity. In geometry courses the pupils also can strengthen their self-confidence very good* because they can get a lot of positive reactions especially on visual level.

Finally I would like to mention that geometry teaching also offers good possibilities to develop the aesthetic perception. (See e. g. Graumann 1988b).

2. A methodical way of geometry teaching

As I already mentioned the orientation of geometry courses which try to follow the named objectives can't be found in the systematic of the scientifical geometry. Therefore *I propose to structure geometry teaching by working on problems resp. fields of problems* whereat from time to time surveying and systematizing discussions take place (cf. also Wagenschein, 1965, p. 18). The scientifical systematic then is no longer the guide for method but the background only for the teacher. Single theorems arise during problem solving as necessary tools. A clear and good

founded development of concepts turn out to be necessary or at least helpful for the understanding and solving of problems. Different representations of geometric subjects and several different definitions or characterizations of geometric concepts have to be treated. Ways how we come to further reaching or sometimes also totally new problems have to be shown and discussed, as e. g. generalizations, analogies and other relations with earlier treated problems.

With such a method the pupils will be led to independent thinking and research-like work. By the retrospective view and the production of relations in a systematic way after each problem solving phase the pupils part by part win a digest of geometry. In some cases the problems can also be chosen by the pupils but mostly this is an important task of the teacher who have to keep the whole development in mind. During working on particular problems yet the pupil should do their own decisions as far as possible. Discussions with the teacher and all pupils as well as between single pupils or in small groups make up an important aspect of this method because aspectful concepts, different strategies for problem solving, correct regulars and the ability to find interesting theorems or problems can be built best in a communicative situation.

Further I would like to mention that with this scetched methodical way the tools should not be fixed like compasses and ruler in classical geometry. Chequered paper, pin boards, card paper with fixed shapes, coloured cubes, murmels or even packing boxes e. g. are helpful tools for geometry teaching. Also *a computer is a very good tool for the method of geometry teaching I propose.* First you can use much more geometric forms by which the geometry at school can be presented more interesting and aspectful. Secondly by "playing" with special programs questions about concepts or new experiences can be stimulated. Moreover the creative work in geometry can be stimulated with a computer much more than with the classical tools.

In this connection I would like to remark that the acquisition of knowledge about computer science and of skills about programming computers is not to be seen as task of geometry teaching. Therefore it is not forbidden to use special software without knowing something about the programming. As in everyday world we use the software like a machine from which we don't know the construction but only the function. (This does not exclude, that the pupils construct simple programs by their own.) However the discussion about the use of computers in general and the reflection about the limitation of the use of computers in special is to be seen as task of such a geometry teaching.

3. Examples for the practice of teaching

In the following I want to illustrate the above general discussion with some examples. First I will talk about three examples out of the domain "polygons" which

mostly concerns the junior secondary school. And secondly I will describe two different aspects out of the domain "curves" which concerns the senior secondary school.

1. Example: *Shapes of triangles*

At the beginning of geometry teaching in the secondary school the children have to obtain a wide visual foundation about the possibilities of shapes of triangles. Thus they should draw a lot of different formed triangles (see e.g. Wittenberg 1963, p. 78 ff). Such exercises also can be combined with problems of art. Here I would like to discuss the following problem which is connected with the Pythagorean way of thinking (i. e. structuring the world by simple ratios).

Find all shapes of triangles (that means all triangles apart from similar ones) which can be built with $1, 2, 3, 4, 5$ *as measures of the sides.*

Such a problem offers besides the experiences about shapes of triangles additional facilities. After some experimental work on this problem the children find a theorem about any triangle – namely the theorem that the sum of two side-measures always must be bigger than the measure of the remaining side. The given problem then can be transformed into the question to find a triple (a/b/c) of numbers out of $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ which hold the inequalities $a \leq b \leq c < a + b$. For the case $a = 1$ it can be concluded that $b = c$. For the other cases it comes out very difficult to get a formula, especially because the triples of similar triangles appear only once. In any way the children get experiences with systematical proceedings. With variations of the given number-set these experiences can be deepend. In upper classes you also can ask for types of triangles which angle-measures have simple ratios (e. g. belongs to the angle-ratio $1:1:1$ the equilateral triangle, $1:1:2$ the right-angled isoceles triangle, $1:2:2$ and $1:1:3$ a triangle out of the regular pentagon, $1:2:3$ the right-angled triangle which make one half of the equilateral triangle). Secondly we can combine the given problem with the systematization of shapes of triangles by setting the task to classify the triangles respectively isosceles and equilateral triangles on one hand and acute, right, obtuse-angled triangles on the other hand. In upper classes you also can ask for a formular (the generalization of the theorem of Pythagoras by using inequalities).

2. Example: *Constant angles in polygons*

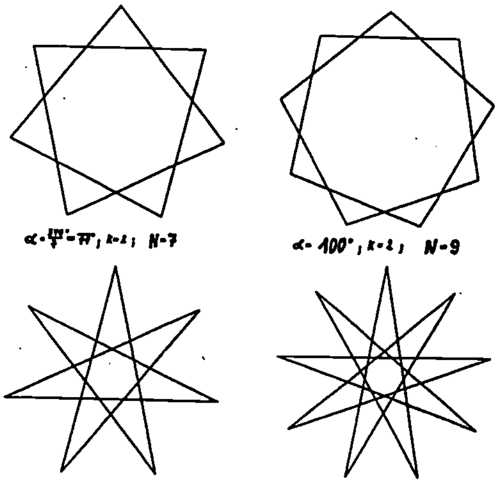
The regular pentagon already offers a lot of interesting questions, from the construction to questions about partial figures and ratios. Another very promising theme, which you find in several text books has to do with the angle-measures of all regular polygons and puzzles with regular polygons. Here I will discuss the following problem:

What happens if you pull down repeated a constant angle-measure and a constant length ?

If the given angle-measure is equal to one of a regular polygon you get the regular polygon of course. But what happens with other measures? *In many cases you get a regular star-polygon.* After getting several examples a lot of questions are coming out: How are their angle-measures related to those of the normal regular polygons with the same or twice number of edges. How much iterations are necessary that the polygon closes? How many regular star-polygons with a fixed number of edges can we find? Does the figure close in all cases?

A computer program to test such questions is very simple in LOGO or COMAL, but also in BASIC or PASCAL it is not very difficult to find out such a program (see fig. 1).

```
 1 REM  * Angle-Iteration *
10 LPRINT CHR$(28);CHR$(37):REM
   * Graphik-Modus is on *
20 INPUT "ANGLE = ";A
30 INPUT "NUMBER OF ITERATIONS = ";B
35 IF B=0 THEN 80
40 INPUT "RADIUS = ";R
50 INPUT "NUMBER OF COLOUR =.";C
55 LPRINT "J";C:REM
   * Choosen Colour is on *
60 W=180-A
62 X=48+R*COS(90)
64 Y=-48+R*SIN(90)
66 LPRINT "M";X;",";Y:REM
* Move to starting-point *
70 FOR I=1 TO B
72 X=48+R*COS(90+I*W)
74 Y=-48+R*SIN(90+I*W)
76 LPRINT "D";",";X;",";Y:REM
   * Draw *
78 NEXT I
80 END
```

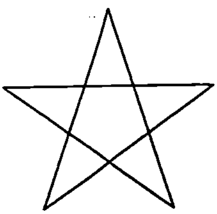


$\alpha = \frac{540°}{7} = 77°$; $k=2$; $N=7$

$\alpha = 100°$; $k=2$; $N=9$

$\alpha = \frac{180°}{7} = 25{,}7°$; $k=3$; $N=7$

$\alpha = 20°$; $k=4$; $N=9$



$\alpha = 36°$; $k=2$; $N=5$

Fig. 1

By looking out for a formula you remark that besides the given angle-measure α and the number of edges n also the number k of 360°- turnings is important. (You can count them while the computer is plotting.) Further it is not very difficult to see that the angle-measure $(180° - \alpha)$ is the measure of turning at one point. With these reflections you come to the formula $n \cdot (180° - \alpha) = k \cdot 360°$ or $(180° - \alpha)/360° = k/n$ where k can be any integer smaller than $\frac{n}{2}$. Indeed it comes out that for $k = 1$ you get the normal regular polygon and only for k, n without common divisor you get different figures. Thus for $n = 3$ or 4 you get no star-polygon, for $n = 5$ you get one star-polygon, for $n = 7$ you get two different star-polygons and in general the number of star-polygons which can be drawn in the given way is equal to the number of integers k which hold $1 < k < \frac{n}{2}$ and have no common divisor with n.

By thinking about the star-polygon with 6 edges which is built by two equilateral triangles we get further types of star-polygons; they arise by combination of two or more polygons of the first type and could be denoted with the integers k, n where the two numbers have a common divisor.
By varying the given length after each step (e. g. halving or doubling) or by varying the given angle-measure after each step (e. g. alternating two measures) you can get a lot of more questions which lead again to new types of star-polygons or entire new themes.

3. Example: *Combinatoric questions with polygones*
The question about the number of all union-lines of 3, 4, 5 or 6 given points you often find in text books for the junior secondary school. By experience I know that pupils like such problems. But to train combinatoric abilities and to find structure qualities you also should work on similar problems like the question about the numbers of possible polygons with 3, 4, 5, or 6 given points or the question about the number of intersections with 3, 4, 5, 6 ... given lines / circles / planes or the question about the union-lines and union-planes with spatial given points. With the first question in case of general position of the points the pupils should learn the different ways of counting at which you can get the formula about the sum of all integers from 1 to a fixed integer. By the looking out for formulas in other cases they can learn to work about more difficult combinatoric problems. Some other interesting and not too difficult problems at which the concept of a general polygon can be deepened is the following:

How many diagonals does a polygon with n edges have? Can you build new interesting figures with all or some diagonals of such a polygon? Or how many areas arise from the diagonals? How many intersection-points arise from the diagonals or the sides resp. how many diagonal points does a polygon have?

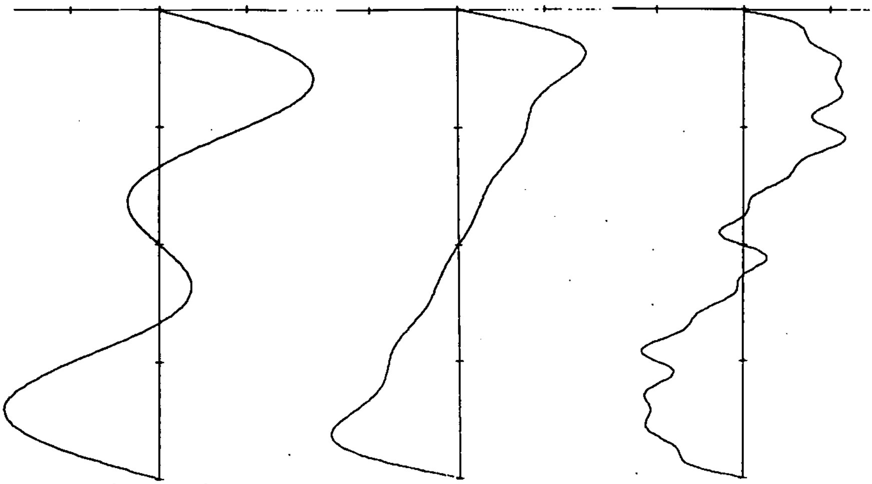
The computer again is a good help for these problems just as computing-help in case of bigger numbers or as tool for getting a lot of different drawn examples.

4. Example: *The family of sinus-curves*
A family of curves is characterized by curve-equations which have one or more parameters. For example all lines through one point or generally all lines built a family of curves. All parabolas with equation $y = a \cdot x^2$ built a family too.
The sense of working with families of curves on one hand is to see a curve in connexion with others and on the other hand to find attributes by systematic resp. dynamic varying. The above named families yet are not very proper for these aims. Therefore I will discuss the family of sinus-curves here; it has also relevance in function theory, electro dynamics, oscillation theory and music.

a) We know that we can get the cosinus-curve from the sinus-curve by transformation $x \rightarrow x + c$.

What do we get by transformating the sinus-curve by $x \to c \cdot x$ with e. g. $c = 1, 2, 3, 4$ or π? What relations can we find between these curves?

b) The sound of an instrument depends on the composition of the upper tones. *How does an equation which describes a basic tone with some upper tones look like? Are there some characterizations about the family of all curves with an equation $y = a \cdot sin(b \cdot x) + c \cdot cos(d \cdot x)$?*
The use of a computer with such questions is nearly indispensable (see fig. 2).



$y = \sin x + \sin 2x$

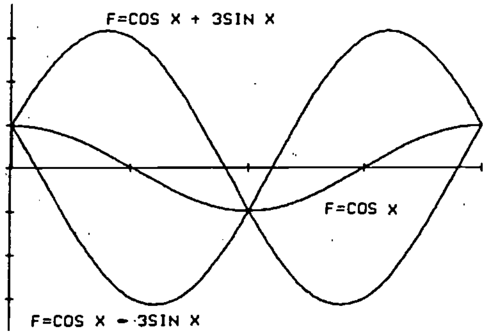
$y = \sin x + 0.5 \cdot \sin 2x + 0.3 \cdot \sin 3x + 0.2 \cdot \sin 4x + 0.1 \cdot \sin 5x$

$y = \sin x + 0.4 \cdot \sin 2x + 0.2 \cdot \sin 4x + 0.1 \cdot \sin 8x$

Fig. 2

c) The curves with equation $y = cos\,x, y = cos\,x + 3 \cdot sinx$ resp. $y = cos\,x - 3 \cdot sinx$ for $0 \leq x \leq \pi$ build a nice figure (see fig. 3).
What symmetries has this figure? What are the measures of this figure? Can you generalize these results?

Fig. 3



d) As generalization of sinus-curves you could use polar coordinates instead of cartesian coordinates. The experiences with curves can be enlarged by this way. Also new interesting questions and relations to art can be found.

How do the curves with equation $r = |a \cdot sin(b \cdot \varphi)|$ with $(r|\varphi)$ as polar coordinates look like? What properties have these curves? With which a, b are these curves not infinite?

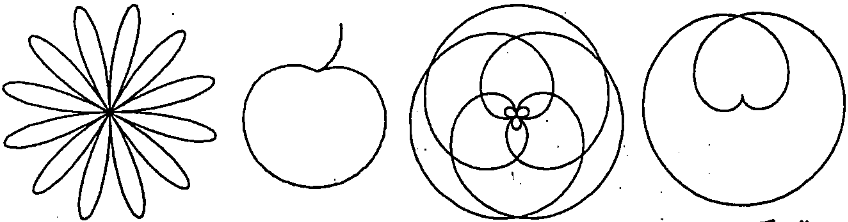
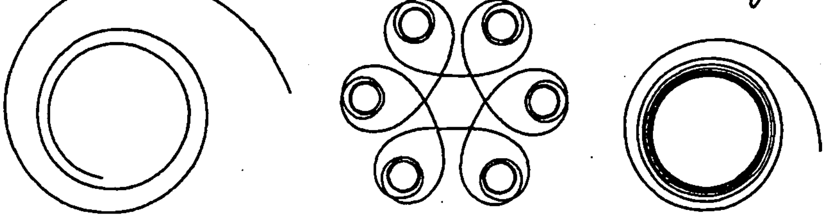


Fig. 4

That the use of a computer with plotter can be very helpful for these problems needs no discussion of course (e. g. see fig 4).

5. Example: *Curves with natural coordinates*
From differential geometry we know that we can describe curves only with inner coordinates (i. e. coordinates which someone who is walking on the curve can determine without outside attributes), namely the *curveture and the arc-length.* These coordinates are called natural coordinates. With given curveture and arc-length for each point of the curve you can generate the curve by integration. An approximate construction can be done in analogy to the approach of a curve with a polygon by given derivation in cartesian coordinates. That means with given curveture and arc-length for a row of curve-points you can approximate the curve with a curve build of parts of circles. This method however is efficient only if you have a lot of given curve-points whose distance is very small. Thus *a computer is necessary to generate curves in this way properly.*

Fig. 5



$K(B) = 10 \cdot B$ $\qquad$ $K(B) = 25 \cdot |\sin B| + 1$ $\qquad$ $K(B) = \log B$

The programming of a computer for such a task normally couldn't be done by pupils. The basic principle and the use of such a program however is a possible theme for pupils in senior secondary school and a chance to get experiences with entire different curves (see e. g. fig 5). They also can get an idea of a method mathematicians use for several problems, e. g. by working on a theory of dynamical systems (e. g. the fractales of Mandelbrot).

References

Bender/Schreiber. 1985. Operative Genese der Geometrie, Wien 1985

Graumann, Günter. 1984. Was kann die Mathematikdidaktik zum neuen Weltbild beitragen? In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1984, S. 126–129

Graumann, Günter. 1985. Computerunterstützter Geometrieunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1985, S. 119–123

Graumann, Günter. 1986. Computers and Geometry Teaching. In: Mathematics Education Research In Finland, Yearsbook 1985, Institute for Educational Research 1986, S. 61–79

Graumann, Günter. 1987. Geometry In Everyday Life. In: Research Report 55, University of Helsinki, 1987, S. 11-23

Graumann, Günter. 1988a Geometrie im Alltag. In: mathematik lehren, Heft 29, 1988, S. 8–14

Graumann, Günter.1988b Mathematik und Kunst. In: Hänsel/Müller: Das Projektbuch Sekundarstufe, Weinheim 1988, S. 148–159

Heymann, Hans Werner. 1989. Allgemeinbildender Mathematikunterricht – was könnte das sein? In: mathematik lehren Heft 33, 1989, S. 4–9

Kirsch, Arnold. 1980. Zur Mathematik – Ausbildung der zukünftigen Lehrer – im Hinblick auf die Praxis des Geometrieunterrichts. In: Journal für Mathematik-Didaktik, Heft 4/1980, S. 229–256

Wagenschein, Martin. 1965. Zur Klärung des Unterrichtsprinzips des exemplarischen Lehrens. In: Die Deutsche Schule, Heft 9/59 sowie Schroedel Auswahl Heft A 6 Hannover 1965, S. 13–26

Wittenberg, Alexander Israel. 1963. Bildung und Mathematik, Stuttgart 1963

Lenni HAAPASAlO
Universität Jyväskylä, Finnland

ZUR COMPUTERUNTERSTÜTZTEN STEUERUNG DER MATHEMATISCHEN BEGIFFSBIlDUNG

Zusammenfassung

Die meisten Begriffe, algorithmischen Vorschrifte und Sätze in der Schulmathematik werden im Lehrplan und im Unterricht "algebraisch" oder "arithmetisch" behandelt. Gute Beispiele dafür bieten "Gleichung", "Verhältnis" und "Proportionalität". Das Verfehlen geometrischer Repräsentationen bedeutet, dass der Schüler diese Begriffe getrennt (auch von ihrer natürlichen Umgebungen und Anwendungen) "lernen" soll. Gibt man aber dem Schüler schon von Anfang an die Möglichkeit, dieser Begriffe die geometrischen Attributen hinzufügen, kan er gleichzeitig alle diese Kenntnisse mit verschiedenen heuristischen Methoden in günstigen Lernumgebungen studieren. Um diese Prozesse planen und leiten zu können, muss man also den Begriff "Steigung" und ihren Bildungsprozess genau analysieren.

Was sind mathematische Bergiffe?

Das mathematische Denken setzt voraus, dass ein Objekt in der reellen Welt oder in unserer Phantasie sich durch ein gedankliches Bild vorstellen lässt. Dies wird (im weiteren Sinne) ein Begriff genannt. Die Bedeutung des jeweiligen Begriffs hängt davon ab, welcherlei Erfahrungen, Gefühle, Definitionen u.s.w. eine Person dem Begriff hinzufügt. Nach der modernen Terminologie bedeutet dies, dass der Begriff (für verschiedene Personen) verschiedene Attribute besitzt. Mathematische Begriffe haben eine wichtige Eigenschaft; sie lassen sich nämlich durch eindeutige Attribute (oder Merkmale) definieren.

Eine der wesentlichsten Fragen der Mathematikdidaktik ist, wie man den Schüler bei dem Erwerben und der Aneignung der mathematischen Begriffe unterstüzt. Das ist der Ausgangspunkt des vom Verfasser angefangenen MODEM-Projekts (Model Construction for Didactic and Empirical Problems of Mathematics Education), und die Grundphilosophie und die Rahmenstruktur für ihn lässt sich teilweise z.B in Beiträge zum MU von 1985 und 1986 (s.Haapasalo 1985 und 1986) finden.
Im MODEM-Projekt spielen die speziellen "didaktischen" Lernprogramme für den Computer eine zentrale Rolle. Im Folgenden wird ein solches Programm mit seinen Anwendungsmöglichkeiten vorgestellt. Bevor wir aber das Programm im einzelnen durchgehen, geben wir einen Überblick über die im Grunde stehende kognitive Psychologie.

Die problemorientierte Erwerbung der mathematischen Begriffe

In aller institutionalen Ausbildung -also auch im Schulunterricht - spielt das Lernen durch Modelle eine dominierende Rolle. Jedoch erwerbt und eignet sich eine Person neue Begriffe durch aktive Handlungen und Interaktionen in ihrer Umgebung an. Ein neuer Begriff ist gewissermassen wie ein "Apfel", dessen Geschmack die Person allmählich zu probieren beginnt. Diese Analogie gibt uns eigentlich einen guten Ausgangspunkt, um den Prozess der mathematischen Begriffsbildung und dessen Anleitung interpretieren zu können. Die Grundprinzipien der problemorientierten Methode sind folgende:

(i) dem Schüler wird eine Problemsituation organisiert, die ihn motiviert und deren wesentliche Merkmale er durch seine früheren kognitiven Modelle erklären kann

(ii) der Schüler wird in diesem Problemlösungsprozess

(s. Fig. 1) angeleitet, um seine kognitiven Modelle auf richtige Weise zu ergänzen.

Diese erste und wichtigste Phase der Begriffsbildung wird Orientierung zum Begriff genannt (s. Fig. 1). Von ihr hängt es ab, wie der Schüler die relevanten und wesentlichsten Merkmale des Begriffs entdeckt. Die Phase der Definierung des Begriffs wird erreicht, indem der Schüler (mit Hilfe des Lehrers) diese relevanten Merkmale in sachgemässer Form fixiert. Das Ganze von diesen zwei Phasen nennen wir Bearbeitung des Begriffs (um eine Verwechslung mit den Wörtern "Erwerben" und "Aneignung" vermeiden zu können).

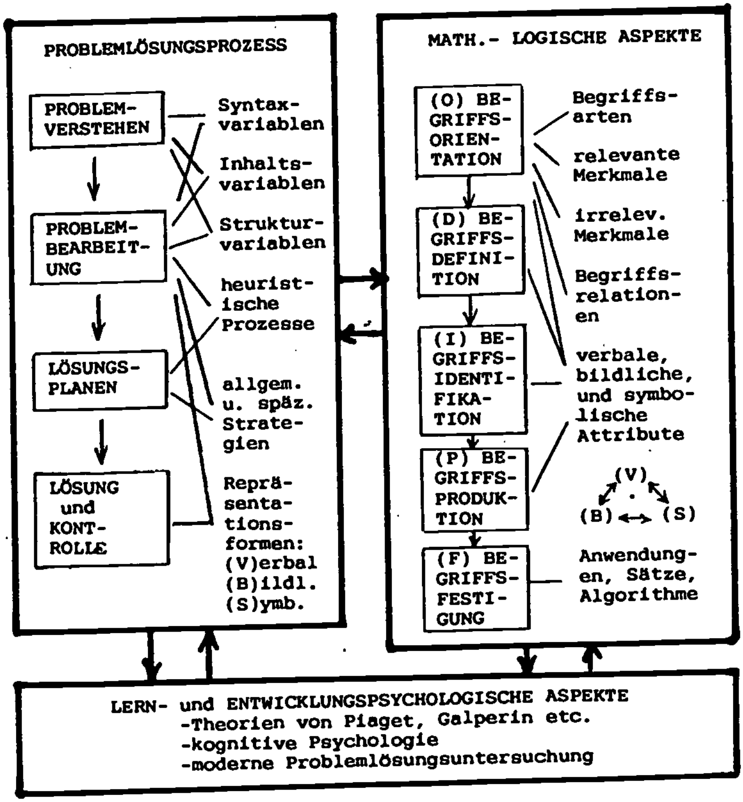


FIG 1. Rahmenstruktur für den problemorientierten MU.

Aneignung der mathematischen Begriffe

Die oben vorgestellte Phase der Begriffsbearbeitung bildet den Kern der problemorientierten Begriffsbildung und deren Leitung. Der Schüler braucht aber noch nicht die relevanten Merkmale des Begriffs zu beherrschen - er hat sich also den neuen Begriff noch nicht angeeignet. Um den Schüler möglichst gut und sachgemäss bei der Aneignung des Begriffs helfen zu können, trennen wir die in Fig. 1 vorgestellten und didaktisch besser beherrschbaren Teilphasen. In der Phase der Identifizierung wird dem Schüler eine Möglichkeit gegeben, sich die relevanten Merkmale (Attribute) des Begriffs anzueignen. Dafür braucht man Aufgaben von verschiedenem Typ, folgendes zu berücksichtigen:

(i) die Aufgaben sollen nur die Funktion der Identifizierung haben
(ii) sie dürfen keine komplizierte Prozessierung der Information voraussetzen
(iii) man braucht genügend viele leichte Aufgaben, bei deren Lösung der Schüler (in seinem Langzeitgedächtnis) ur ein Paar Merkmale gleichzeitig zu behandeln braucht
(iv) die Aufgaben sollen möglichst vielseitig sein, so dass der Schüler eine sachgemässe Menge von verbalen (V),bildlichen (B) und symbolischen (S) Attribute des Begriffs in seinem Langzeitgedächtnis speichern kann.

Dies setzt voraus, dass man Aufgaben zwischen

verbaler und verbaler Form (IVV),
verbaler und bildlicher Form (IVB),
verbaler und symbolischer Form (IVS),
bildlicher und bildlicher Form (IBB),
bildlicher und symbolischer Form (IBS) und
symbolischer und symbolischer Form (ISS)

hat.

Jede von diesen sechs Moduln beginnt mit Aufgaben, die eine Identifizierung erst zwischen nur einem Objekt und einem Begriff (s. Fig.2) und Stufe für Stufe zum Schluss zwischen mehreren Objekten und mehreren Begriffen (s. Fig. 3) fordern.

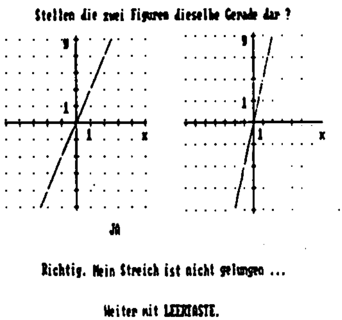


FIG 2. Identifikation IBB von einfachstem Typ

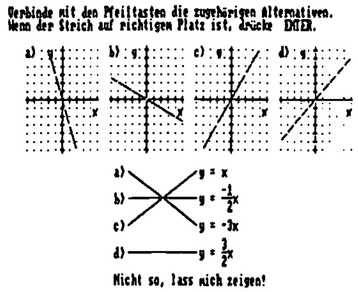


FIG 3. Identifikation IBS von kompliziertem Typ

Die Produzierung des Begriffs bedeutet, dass der Schüler von den gegebenen Attributen ausgehend, einen Vertreter für den Begriff zu produzieren hat. Bezeichnen wir die Produzierung kurz mit P, sehen wir dass diese Phase der Begriffsbildung neun wesentlich verschiedene Aufgabentypen zwischen den oben genannten Formen der Information voraussetzt, nämlich PVV, PVB, PVS, PBV, PBB, PBS, PSV, PSB und PSS. In Fig. 4 wird einen Aufgabentyp von PBB vorgestellt. Auch von den Produzierungsaufgaben wird gefordert, dass sie kein komplizierte Verarbeiten der Information voraussetzen. Befreit man sich von dieser Forderung, kommt man in die Phase der Begriffsfestigung. In dieser Phase gibt man dem Schüler eine Möglichkeit, den Begriff in verschiedenen Zusammenhängen anzuwenden, und somit das mathematische Wesen des Begriffs auf sachgemässe Weise zu vertiefern. Durch die Festigungsaufgaben lernt der Schüler mit Hilfe der in der
Identifizierungs- und Produzierungsphasen angeeigneten

Attribute allmählich auch komplizierte Prozessierung der Information durchzuführen. Im Prozess der Begriffsbildung (Fig.1) setzt besonders die Begriffsbearbeitung kreatives Denken des Schülers (und des Lehrers) voraus, während er sich bei der Begriffsaneignung hauptsächlich auf reproduktive Handlungen stützen kann.

Kann der Computer die Begriffsbildung steuern?

Um einen Überblick auf Lernprogramme des MODEM-Projekts zu bekommen, betrachten wir als Beispiel das Programm "STEIGUNG." Dieses Programm ist sowohl für Forschungszwecke als auch für Schulunterricht geplant. Die Struktur des Programms folgt genau dem Modell der Begriffsbildung (s. Fig.1). Dies bedeutet, dass jede Phase als ein selbstständiger Modul programmiert und als Lernprogramm durchführbar ist. Wählt man aber im Hauptwahlschema "den ganzen Prozess der Begriffsbildung", so geht der Schüler mit Hilfe des Computers alle Teilprozesse von (O) bis (F) in richtiger didaktischer Ordnung durch, und sein Vorgehen wird vom Computer unterstützt und kontrolliert.

Anfangs bietet das Programm eine Möglichkeit, einen diagnostischen Test und eine Wiederholung der für den Begriff Steigung notwendigen Vorkenntnisse durchzuführen. Im Orientierungsmodul kann der Schüler Punkte und deren mathematischen Eigenschaften im Koordinatensystem manipulieren.

Indem er ins Koordinatensystem gewisse Punkte trägt, die Verhältnisse zwischen ihren Koordinaten und deren Repräsentationen vergleicht, wird ihm eine Möglichkeit geboten, die Grundidee des Begriffs "Steigung" zu verstehen. Der Schüler arbeitet, um das relevante Merkmalsystem für "Steigung" zu fixieren, indem er den von dem Computer zweckmässig produzierten kognitiven Wiederspruch löst. Diese Ergebnisse werden im Definierungsmodul vorgestellt.

Der Identifizierungsmodul enthält alle früher vorgestellten sechs Aufgabentypen. Fig. 2 stellt den einfachsten Typ von IBB, und Fig. 3 den komplizierten Typ von IBS. Es sei erwähnt, dass schon die Aufgabe in Fig. 2 grosse Schwierigkeiten (auch für Lehrer) zu bieten scheint.
Der Produzierungsmodul bietet Aufgaben von allen neun verschiedenen Informationtypen. Fig. 4 stellt eine Frage vom Typ PBB, die der Schüler mit den Pfeiltasten beantworten kann. Der Computer ist fähig, sehr gemischte symbolische und sogar verbale Antworten des Schülers zu interpretieren und testen.
Der Festigungsmodul enthält Aufgaben u.a.

- über die Abhängigkeit der Zeit, Geschwindigkeit und Beschleunigung
- über Wechselkurse
- über Approximationen mit Hilfe einer Linie
- über die Kosten der Ferngespräche.

Als Besonderheit bietet der Computer ein "Flugzeugspiel", wo der Schüler das Flugzeug in richtige Richtung nach den im Bildschirm gegebenen Kenntnissen zu steuern hat. Das dient einem automatischen Beherrschen des Begriffs Steigung. Auch eine formative Evaluation ist möglich.

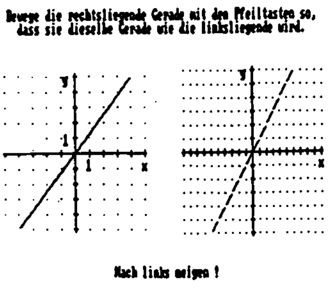


FIG 4. Produktionsaufgabe vom Typ PBB

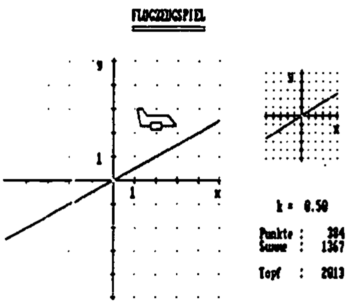


FIG 5. Flugzeugspiel für Begriffsfestigung

Dieses Lernprogramm ist so weit wie möglich sowohl schüler- als auch lehrerfreundlich geplant. Zu dem, dass der Lehrer irgendeine Moduln voneinander unabhängig für CUU wählen kann, kann er auch die Reihenfolge der Moduln oder der Aufgabe schnell verändern. Der Lehrer kann also den Schüler "die Steigung" ganz selbständig mit Computer allein lernen lassen, oder er kann für irgendeine Phase der Begriffsbildung vielseitige Aufgaben des Programms in irgendeinem Mass und in irgendeiner Reihenfolge benützen. Durch Verändern der Reihenfolge der Teilmoduln (Teilphasen) kann der Lehrer in gewöhnlicher Unterrichtspraxis untersuchen, was die jeweiligen Teilphasen für den Schüler bedeuten. Lässt man z.B. die Orientierungs- und Identifizierungsmoduln weg, so wird der Begriff "nach konventioneller deduktiver Methode dem Schüler gelehrt".

Warum ist der Begriff "Steigung" didaktisch interessant?

Um zu begründen, weshalb man den Schüler gründlich und sachgemäss gerade bei der Begriffsbildung der Steigung steuern und unterstützen sollte, sei erwähnt, dass die lineare Funktion

(i) eines von den wichtigsten und feinsten Beispielen dafür bietet, wie die mathematische Information in verschiedenen Formen der Information (V,B,S) darsgestellt werden kann, und auch soll

(ii) ein nützliches und notwendiges Hilfsmittel bei der Konkretisierung einiger abstrakter Begriffe, wie Proportionalität ist

(iii) das Verstehen der Denkweise der analytischen Geometrie ermöglicht, indem der Schüler von den inneren Eigenschaften der Punkte und Figuren ausgehend, die Stufe vom Verstehen ihrer Verhältnisse und Veränderungen erreicht

(iv) das spontane visuale Denken, bis zum allgemeineren und mehr abstrakten transfiguralen Denken ermöglicht, indem algebraische Fähigkeiten des Schülers verstärkt werden

(v) ein zentrales Hilfsmittel ist, wenn man eine grosse Menge von Problemen und Phänomena in der Natur und im Alltagleben interpretiert und löst

(vi) vielerlei Strategien für Problemsituationen bietet.

Wir können uns also vorstellen, dass nach der gründlichen Aneignung des Begriffs der linearen Funktion der Schüler sein mathematisches Knowhow auf wesentliche Weise verstärkt hat. Die relevanten Attribute des Begriffs Steigung mit ihren verschiedenen Repräsentationsformen spielen von Anfang an eine zentrale Rolle.

Ein Überblick auf Erfahrungen bei MODEM

Bei unserer Forschung haben die Schüler das Programm in zwei Stunden durchgegangen. Bedenken wir aber, wieviel Mathematik eigentlich die Attribute des Begriffs Steigung enthalten (im Lehrplan mehrere Monate!), so verstehen wir dass ein ruhiges Durchgehen während mehrerer Stunden und auf vielseitige Arbeitsweisen empfehlenswert wäre.

Unsere empirische Forschung hatte die folgenden Schwerpunkte:

- die Begriffsbildung wurde "gestört", indem gewisse Teilprozesse weggenommen oder verändert wurden
- die Wirkung von verschiedenen Teilmoduln wurde untersucht
- die Kooperation (Arbeit zu zweit) wurde beobachtet
- die Zeitliche Ablauf wurde beobachtet
- die Wirkung des Computers auf die Lernprozesse wurde untersucht

-mit einem Fragebogen wurde erkundigt, welche Wirkung die se Art von Lernen beim Schüler hinterlässt
-es wurde auch die Fertigkeit der Schüler untersucht, den Computer oder das Lernprogramm auf richtige Weise zu gebrauchen

Die Erfahrungen sowohl in Finnland als auch in Deutschland zeigen, dass die Schüler am liebsten zu zweit arbeiten möchten. Wenn sie die vorgekommene Situation zusammen verbalisieren, scheint derartige Diskussion vorzukommen, die z.B. Piaget und Wygotsky bei der Begriffsbildung als wesentlich ansehen. Besonders die Identifizierungaufgaben scheinen vielseitige und eifrige Diskussion über die Attribute anzuregen. Diese Art vom sozialen Lernen und von der Problemlösungsumgebung wird in der modernen Pädagogik als besonders brauchbar angesehen.

Das Weglassen der Identifizierungsphase war ganz katastrophal für beinahe alle Schüler (N > 200). Dies beruht offenbar auf der Tatsache, dass die Schüler überhaupt keine vernünftigen Attribute für die Begriffe hatten, auf die sich der Begriff Steigung stützt (d.h. die Gerade, das Verhältnis !). Die ursprünglich als reproduktive Phase angesehene Identifizierung hat sich also die Rolle einer produktiven Phase genommen, zwar nicht für den Begriff "Steigung", sondern eher für den Begriff "Verhältnis" oder "Proportion"!

Hinweise:

Haapasalo, L. 1985. Über produktive und reproduktive Aktivität bei der Aneignung von mathematischen Begriffen. Beiträge zum MU. Verlag B. Franzbecker. Bad Salzdethfurth.

Haapasalo, L. 1986. Über computerstützte Steuerung der mathematischen Begriffsbildung. Beiträge zum MU. Verlag B. Franzbecker. Bad Salzdethfurth.

Konrad Krainer (Klagenfurt, Österreich)

KONSTRUKTION VON AUFGABENSYSTEMEN IM GEOMETRIEUNTERRICHT

Lehrer messen Aufgaben bei der Planung, Durchführung und Evaluation von Mathematikunterricht eine hohe Bedeutung zu (vgl. BROMME 1986). Andererseits wird "Aufgabenorientierung" in der didaktischen Diskussion häufig als abwertender Terminus verwendet. Es ist die Frage zu stellen, ob nicht Mißbräuche den Blick dafür trüben, daß Aufgaben auf verschiedensten Ebenen eine bedeutende Rolle spielen können. Im folgenden werden Überlegungen angestellt, wie man mit einem systemhaften Konstruieren von Aufgaben zu einem lebendigen Geometrieunterricht beitragen kann. Entsprechende Konkretisierungen werden anhand des Winkelbegriffes erörtert. Eine ausführliche Darstellung findet man in KRAINER (1989).

1. Zur Rolle von Aufgaben im Mathematikunterricht und in der Mathematikdidaktik

Im Mathematikunterricht spielen Aufgaben eine bedeutende Rolle:

- Schulbücher bestehen zum Großteil aus Aufgaben; Aufgabensammlungen sind beliebte Unterrichtsmittel.
- Bei Prüfungen wird vorwiegend das Lösen von Aufgaben verlangt.
- Die Planung von Mathematikunterricht geschieht hauptsächlich über die Erstellung von Aufgaben: "Die Aufgabenauswahl ist der Gegenstand der bewußten Entscheidungen bei der Unterrichtsplanung. Die Alternativen zwischen verschiedenen Aufgaben sind die Alternativen, die überhaupt abgewogen werden." (BROMME 1986)

Der Mathematikunterricht ist - von projektorientierten und fächerübergreifenden Aktivitäten abgesehen - ein Arbeitsfeld, bei welchem das Stellen und Bearbeiten von Aufgaben zum "Hauptgeschäft" von Lehrern und Schülern zählt.

In der Mathematikdidaktik hingegen - mit Ausnahme des Schulbuchschreibens- treten Aufgaben weniger als Gegenstände auf, sondern mehr als Mittel - als exemplarische Konkretisierungen und Belege theoretischer Überlegungen:

- Bei Diskussionen über Lernziele und Lerninhalte wird manchmal eine Ebene der Konkretisierung angestrebt, die mithilfe von Aufgaben erreicht wird. So wird zum Beispiel nach Aufgaben gesucht, die bestimmten Lernzielen zuordenbar sind und sie illustrieren, oder die Einstiege in bestimmte Problembereiche erleichtern.

- Im Rahmen von Überlegungen zur Bildung mathematischer Begriffe werden immer wieder Aufgaben als Mittel herangezogen, um den Fortgang (Ablauf) eines Begriffsbildungsprozesses zu beschreiben.
- Empirische Untersuchungen - z. B. von mathematischen Fähigkeiten von Schülern - richten sich häufig darauf, wie Schüler mit bestimmten, vorgegebenen Aufgaben umgehen, welche Lösungsansätze auftreten, oder welche "Fehler" gemacht werden.

Aufgaben stehen also zwar oft im Blickfeld didaktischer Diskussionen, stehen aber selten explizit im Mittelpunkt. "Aufgabenorientierung" wird sogar häufig als negativ gefärbter Terminus verwendet, der auf einen unsystematischen, perspektivenlosen Unterricht hinweist. Diese Sicht ist beeinflußt von Gefahren und Mißbräuchen, die im Zusammenhang mit Aufgaben im Mathematikunterricht tatsächlich gegeben sind:

- Die Gefahr einer "Monokultur" ist vor allem dann latent, wenn die Bedeutung von Aufgaben mit deren (leichter) Abprüfbarkeit verwechselt wird. So können ganze Klassen von Aufgaben entstehen, die nach einem einzigen Schema gelöst und auch beurteilt werden, aber wenig zur Weiterentwicklung eines Begriffes (einer Theorie) beitragen und somit Selbstzweck sind.
- Die Gefahr eines "Wildwuchses" besteht dann, wenn eine bunte Palette an Aufgaben angeboten wird, die aber keine zielorientierte Richtlinie, kein "System" erkennen läßt, sondern lediglich ein isoliertes Nebeneinander von verschiedenartigen Aufgaben darstellt.
- Ein Problem, welches u. a. durch eine Analyse von Schulbüchern belegt werden kann (vgl. KRAINER 1989, S. 54ff), ist jenes des "Fehlwuchses": Es werden Aufgaben gestellt, die nicht zum Vorangehenden bzw. Darauffolgenden passen, oder diesem sogar entgegenwirken. So werden etwa (natürlich rechtsdrehende) Zeiger einer Uhr zur Einführung eines linksorientierten Winkels verwendet. Abgesehen von "Ungereimtheiten" bei der Orientierung und z. B. auch bei der Messung (ungünstige Überlagerung von Zeit- und Winkelmessung) ist vor allem nicht einzusehen, warum man sich überhaupt für den Winkel zwischen Uhrzeigern interessieren soll.

Es ist jedoch die Frage zu stellen, ob nicht der Mißbrauch im Zusammenhang mit Aufgaben den Blick dafür trübt, daß Aufgaben bedeutende Funktionen haben können. Es wurde bereits hervorgehoben, daß Aufgaben in der didaktischen Diskussion primär als Hilfsmittel zur Erörterung allgemeinerer Sachverhalte verwendet werden.

Es wird nun zur Diskussion gestellt, Aufgaben in gezieltere, explizitere Verwendungszusammenhänge zu stellen. Ähnlich wie man Moleküle als Grundbausteine der Chemie betrachtet, kann man Aufgaben als kleinste Einheiten unterrichtlichen Denkens und Handelns sehen (vgl. von HARTEN/STEINBRING 1985) und sie als ("unter die Lupe zu nehmende") Lernfelder für didaktische Diskussionen verwenden. Aufgaben erhalten damit die Rolle einer Kommunikationsbasis über inhaltliche Fragen des Mathematikunterrichts. Der Vorteil besteht vor allem darin, daß damit Bezugspunkte zu realem Unterricht entstehen, die in konkrete Planungsüberlegungen einfließen können. Wenn auf schulpraktischer Ebene (im Unterricht, bei der Planung des Lehrers) in Kategorien von Aufgaben gedacht und gehandelt wird, bietet es sich an, daß sich auch die Didaktik als zugehörige Berufswissenschaft vermehrt und explizit mit der Konstruktion von Aufgaben beschäftigt, und zwar im Sinne einer bewußten Auseinandersetzung mit der Vermittlung mathematischer Inhalte im Unterricht.
Erfahrungen in der Lehrerfortbildung zeigen, daß didaktische Diskussionen oft erst dann lebhaft werden, wenn es um konkrete Aufgaben geht: Sie erweisen sich als fruchtbare Diskussionsgrundlagen, als exemplarische Übungsfelder für didaktisches Denken und Handeln. So wird eine Diskussion über "Leistungsbeurteilung" oft erst durch Aufgaben "auf den Punkt" gebracht: Plötzlich wird es spannend, über den Sinn von Inhalten oder über die Ziele einer Unterrichtssequenz zu diskutieren.

Insgesamt sehe ich zumindest drei - miteinander verknüpfte - Bereiche, in denen Aufgaben eine bedeutende Rolle zukommt:

- Aufgaben als systemische "Organisationseinheiten" von Unterricht (unterrichtspraktischer Aspekt).
- Aufgaben als "Diskussionsfelder" zu bestimmten Inhalten und Zielen (kommunikativer Aspekt).
- Aufgaben als "erzeugende" Elemente von Begriffen (epistemologischer Aspekt). (Das Wort "erzeugend" ist dabei in Anlehnung an den von LAKATOS geprägten Terminus "beweiserzeugter Begriff" zu verstehen: Ich gehe von der Idee aus, daß ein entsprechendes System von Aufgaben einen Begriff "erzeugen" kann, wobei jede Aufgabe für einen bestimmten Aspekt des Begriffes steht.)

Im folgenden Abschnitt geht es vor allem um den erstgenannten Aspekt, wobei am Beispiel des Winkelbegriffes die Konstruktion von Aufgabensystemen im Geometrieunterricht erörtert wird.

2. Konstruktion von Aufgabensystemen als Organisationsprinzip lebendiger Geometrie

Den schon angedeuteten Gefahren wie "Monokultur", "Wildwuchs" oder "Fehlwuchs" könnte entgegengetreten werden, indem man so etwas wie ein System von Aufgaben entwickelt. In diese Richtung geht der Ansatz von Gerd von HARTEN und Heinz STEINBRING (1985), wenn sie Aufgabensysteme im Stochastikunterricht als didaktische Konzepte zur Materialentwicklung in der Lehrerfortbildung vorschlagen. Sie nehmen keine allgemeine Explikation des Begriffes "Aufgabensystem" vor und sehen den wichtigsten systemischen Gesichtspunkt ihres Konzeptes im Herausfinden einer Beziehungsstruktur für zusammengehörige Aufgaben. Während sich in der Stochastik der Aspekt des Analogen (Variation verschiedener Parameter) dafür anbietet, ist in anderen Disziplinen - wie etwa in der Geometrie - nach anderen Orientierungsmustern zu suchen.
Wenig Ansatzpunkte liefern Vorschläge zu Aufgabenfolgen, die durch Stufungen gekennzeichnet sind, wie sie z. B. in MARKERT (1979) erörtert werden: 1. Motivierungsaufgaben, 2. Stofferwerbsaufgaben, 3. Übungsaufgaben, 4. Anwendungsaufgaben und 5. Lernkontrollaufgaben. Es wird dementgegen der Standpunkt vertreten, daß jede Aufgabe Motivierungs-, Stofferwerbs- (Begriffsbildungs-), Übungs- und Lernkontrollfunktion besitzen soll. Anwendungsaufgaben sollten vor allem unter zwei Aspekten gesehen werden: Einerseits als Gelegenheit, Umweltsituationen zu betrachten und zu strukturieren, und andererseits als Möglichkeit, über das Verhältnis von Theorie und Praxis zu reflektieren.

Reflexion ist eine der zentralen Ideen einer "lebendigen Geometrie", deren Wesen in dieser Arbeit nur in äußerst knapper Form durch einige Leitlinien wiedergegeben werden kann:

- Im Geometrieunterricht geht es nicht um das Fach "Geometrie" (die "Sache", den "Stoff"), sondern um die (Weiter-) Entwicklung einer aktiven Auseinandersetzung des Schülers mit geometrischen Fragestellungen. Vor allem der Reflexion des Lernenden zum Fach sollte besonderes Augenmerk geschenkt werden.
- Im Geometrieunterricht geht es um den Erwerb eines komplexen Verständnisses der Beziehung von Umweltbezug und Theoriebildung. Umweltbezug ist nicht als propädeutischer Motivationsträger ("Vorspiel") von Theoriebildung zu sehen, sondern als bedeutender Prozeß einer reflektierten Erweiterung der individuellen Erfahrungswelt.

- Im Geometrieunterricht geht es um eine möglichst aspektreiche Auseinandersetzung des Schülers mit geometrischen Fragestellungen. Der Unterricht ist daher keinesfalls entlang (nur) einer bestimmten Hintergrundtheorie (z. B. Abbildungsgeometrie) organisierbar.

Weitere erläuternde Aspekte einer lebendigen Geometrie (Der Schüler als Konstrukteur von Wissen, Problemorientierung und Kreativität, Anschauungsvermögen und Dreidimensionalität, Betonung operativer und relationaler Aspekte) findet man in KRAINER (1989, 320 ff.).

Es wird die Auffassung vertreten, daß die Konstruktion von Aufgabensystemen ein adäquates Mittel darstellt, einen "lebendigen Geometrieunterricht" zu organisieren.

Zu Analysezwecken wird im folgenden von einer dreigliedrigen Struktur von Aufgabensystemen im Geometrieunterricht ausgegangen:
- Mikrostruktur (Die einzelnen Aufgaben selbst.)
- Mesostruktur (Netze zusammengehöriger Aufgaben: Aufgabengruppen, Sequenzen.)
- Makrostruktur (Die Beziehung von "Umwelt" und "Theoriewelt".).

2.1 Makrostruktur eines Aufgabensystems

Mit der Makrostruktur eines Aufgabensystems im Geometrieunterricht ist die Beziehung von "Umwelt" und "Theoriewelt" gemeint.
Es gibt viele Versuche, diese beiden "Welten" glatt miteinander zu verbinden. Dies sieht dann meist so aus: Ein theoretisches Problem (oder ein Begriff) wird umweltbezogen "schmackhaft gemacht", dann wird "richtig Theorie betrieben" und am Schluß wird allenfalls wieder ein kurzer Alibi-Umwelt-Bezug hergestellt (eine Art "Sandwich-Taktik").
Natürlich sind Umwelt und Theoriewelt öfters (eng) miteinander verknüpft. Häufig geht es jedoch ausschließlich um ein theoretisches Problem (z. B. beim Beweis eines Satzes), oder um eine rein praktische Situation, die nicht sofort zu einem theoretischen Problem "hochstilisiert" werden soll.
Es scheint angebracht, einen flexibleren Umgang mit der Beziehung Umwelt-Theoriewelt im Unterricht zu fördern: Einerseits geht es um eine Trennung dieser beiden "Welten", andererseits gilt es aber auch, sie auf einer höheren Ebene wieder miteinander in Verbindung zu bringen.

Als Ansatz bietet sich das Arbeiten in drei geometrischen "Denkbereichen" an:
- Geometrie als Konstruktion von Umwelt (Dinge und Phänomene)
- Geometrie als Konstruktion von Theoriewelt (Theoretische Begriffe)
- Geometrie als Netzwerk von Umwelt und Theoriewelt (Anwendungen und Modellbildungen).

Es erscheint naheliegend, mit der "Konstruktion von Umwelt" zu beginnen, um bei "fachinternen" Problemstellungen bereits gewisse Vorerfahrungen zu besitzen. Im dritten Denkbereich, in welchem Verbindungen zwischen den ersten beiden Bereichen geknüpft werden, kommen Anwendungen und Modellbildungen als Bindeglieder eine große Bedeutung zu (vgl. die Aufgabe in 2.3).

2.2 Mesostruktur eines Aufgabensystems

Die Mesostruktur eines Aufgabensystems (Vernetzung von Aufgaben zu Aufgabengruppen, Vernetzung letzterer zu Sequenzen) ergibt sich primär aus fachdidaktischen Überlegungen und hängt sehr stark von der jeweiligen Themenstellung (bzw. vom jeweiligen Begriff) ab.
Am Beispiel des Winkelbegriffes sei erläutert, wie ein Aufgabensystem aufgebaut sein kann. In KRAINER (1989) werden fünf Sequenzen (zu je 10-16 Aufgaben) vorgeschlagen, wobei die Sequenzen 1 und 2 dem ersten Denk-bereich, die Sequenzen 3 und 4 dem zweiten Denkbereich und die Sequenz 5 dem dritten Denkbereich zuordenbar sind.
Neben der Berücksichtigung fachdidaktischer Aspekte zur Strukturierung des Aufgabensystems wird u. a. die Aufeinanderfolge von Vertiefungen und Erweiterungen als allgemeines Strukturierungsprinzip verwendet:

Sequenz 1: Wir messen Winkel (Vertiefte Auseinandersetzung mit der Tätigkeit des Messens.)

Sequenz 2: Verschiedene Situationen, verschiedene Winkel (Betrachtung von Situationen, in denen die Entwicklung neuer Vorstellungen von Winkel nötig wird: Erweiterung.)

Sequenz 3: Beweisen mit Winkeln (Beweisen und Definieren: Theoretische Vertiefung.)

Sequenz 4: Neue Problembereiche (Erweiterung auf verschiedenste Problembereiche, in denen der Winkel als Forschungsmittel relevant ist.)

Sequenz 5: Praktische Anwendungen (Anwendungen und Modellbildungen als Ausgangspunkt begrifflicher Vertiefungen und Erweiterungen.).

Zur Illustration sei nur die Sequenz 5, "Praktische Anwendungen", herausgegriffen. In ihr werden Anwendungen und Modellbildungen aus verschiedensten Lebens- und Lernbereichen betrachtet: Güterproduktion, Sport, Spiel, Wohnen, Geographie, Physik, Vermessungswesen. Im Vordergrund steht die Verbindung von theoretischen und praktischen Sachverhalten.
Die 16 Aufgaben der Sequenz "Praktische Anwendungen" werden in KRAINER (1989) in fünf Aufgabengruppen untergliedert: "Modellbildungsprozesse"; "Erörterung verschiedener Situationen"; "Verkörperung mathematischer Sätze in der Umwelt" (siehe unten); "Probieren, Schätzen, Orientieren"; "Rekonstruktion von Zwecken".

In der Aufgabengruppe "Verkörperung mathematischer Sätze in der Umwelt" etwa geht es darum, reale Situationen als "Anwendungsfälle" theoretischer Sachverhalte zu erkennen:

Aufgabe A07: Ein mathematischer Satz wird gespielt! (Satz des Thales - Reflexionen zu einem Spiel.)

Aufgabe A08: Wir basteln einen Neigungsmesser. (Normalwinkelsatz - ein Gerät als Verkörperung eines Satzes.) (Siehe 2.3)

Aufgabe A09: Wir messen Höhenwinkel und Tiefenwinkel. (Normalwinkelsatz/ Kongruenzsätze - Grundideen zur Vermessung.).

2.3 Mikrostruktur eines Aufgabensystems

Jede Aufgabe steht für bestimmte Inhalte, für bestimmte Ziele, für bestimmte Aspekte eines oder mehrerer Begriffe. Von wesentlicher Bedeutung ist die Reflexion des Lernenden über jede Aufgabe, und über die jeweils gemachten Lernschritte. Dies erleichtert nicht nur das Fortschreiten zu den nächsten Aufgaben, sondern läßt dem Lernenden auch vermehrt die Möglichkeit, das angepeilte "System" erkennen und damit den roten Faden mitvollziehen zu können. Es scheint daher ratsam zu sein, zu jeder Aufgabe eine explizite Aufforderung zur Reflexion zu formulieren. Voraussetzung dafür ist natürlich, daß die Aufgaben so gestaltet sind, daß sie von den Schülern selbst gelesen und bearbeitet werden können. Insgesamt soll damit eine gewisse "Eigentragfähigkeit" von Aufgaben (bzw. Aufgabengruppen) gewährleistet sein, die den Lehrer vermehrt die Rolle eines Prozeßbegleiters einnehmen läßt. Aus dieser Sicht wird Lernen nicht als Abbildungsprozeß (vom Lehrer als Produzenten zum Schüler als Konsumenten) verstanden, sondern als Prozeß einer aktiven Auseinandersetzung des Schülers mit dem Fach.

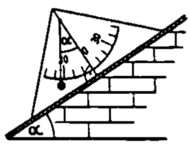
Mit der Aufhebung der Stufung Vortragen (Lehrer) - Üben (Schüler) ist auch die Rolle des Übens neu zu überdenken. Es ist zu erwarten, daß die Eigentätigkeit und Reflexion der Schüler die Qualität der Lernprozesse erhöht und das vernetzte Herangehen an die Themenstellungen (verbunden mit der Ausführung vielfältiger Handlungen) immer wieder implizite Übungssituationen schafft.

Die Orientierung für den Lehrer - im Sinne einer didaktischen Kurzinformation - kann dadurch erleichtert werden, daß bei jeder Aufgabe "mögliche Schüleraktivitäten", "Reflexionen" und evtl. auch "Lernziele" angegeben werden.

Als konkretes Beispiel sei die (bereits oben erwähnte) Aufgabe A08 "Wir basteln einen Neigungsmesser" besprochen (KRAINER, 1989). Die Leistung der Schüler (die den innermathematischen Sachverhalt bereits kennengelernt haben müssen) soll vor allem darin liegen, daß sie den Neigungsmesser als Verkörperung eines mathematischen Sachverhaltes in der Umwelt erkennen, selbst einen einfachen Neigungsmesser herstellen, diesen auch praktisch ausprobieren und über die Aufgabe insgesamt reflektieren:

A 08 *Wir basteln einen Neigungsmesser*

Zur Bestimmung von Dachneigungen, Böschungswinkeln, usw. wird der Neigungsmesser (auch "Setzwaage" genannt) verwendet (Abb.):



Warum kann man auf der Skala des Neigungsmessers den Böschungswinkel messen? Oder anders formuliert: Welche mathematische Aussage über zwei Winkel wird bei diesem Gerät verwendet? Stelle selbst einen einfachen Neigungsmesser her und erprobe ihn an einigen Dingen oder Situationen, die in unserer Umwelt auftreten! Überlege abschließend auch, welche Rolle dieses Beispiel hinsichtlich Theorie und Praxis einnimmt!

Mögliche Schüleraktivitäten:
- *Analyse des Neigungsmessers.*
- *Herstellung eines eigenen Neigungsmessers.*
- *Durchführung einiger Messungen mit dem Neigungsmesser.*
- *Reflexion über die Verkörperung mathematischer Sätze in der Umwelt.*

<u>*Reflexion:*</u>

- *Der Neigungsmesser ist ein einfaches Beispiel für eine Anwendung eines theoretischen Satzes in der Praxis. Dies sagt jedoch nichts darüber aus, ob es zuerst den Satz gab, oder ob zuerst eine praktische Notwendigkeit für ein Meßgerät entstand, wobei sich im Rahmen dessen Entwicklung die Vermutung über einen allgemeinen geometrischen Sachverhalt ergab (Modellbildung).*
- *Der Neigungsmesser kann als Realisierung der Idee des Satzes über Normalwinkel interpretiert werden. Die im Satz bewiesene Beziehung ist ein theoretisches Modell des Neigungsmessers ("praktisches Modell").*

3. Möglichkeiten und Grenzen von Aufgabensystemen im Unterricht

Zunächst zu den <u>Möglichkeiten:</u>

- Aufgabensysteme erlauben eine systematische Planung zu vielen Themenstellungen des Geometrie- und Mathematikunterrichts: Von ganz kleinen Einheiten (mit z. B. drei Aufgaben) bis hin zu umfangreichen Themenstellungen.
- Aufgrund der "Eigentragfähigkeit" der Aufgaben und Aufgabengruppen kann der Lehrer vermehrt von seiner Rolle als Lehrender entlastet werden: Aufgabensysteme fördern die Selbsttätigkeit und Reflexion der Schüler. Geometrie (Mathematik) kann als aktive und reflektierte Weiterentwicklung der Beziehung des Lernenden zum Fach verstanden werden. Der Schüler kann zum Konstrukteur (s)einer "lebendigen Geometrie" werden.
- Aufgaben sind - was den Austausch von Unterrichtserfahrungen betrifft- handliche Kommunikationseinheiten und können zu einer sinnvollen "Materialisierung didaktischer Überlegungen" beitragen.
- Ideen für Aufgaben liegen in großer Zahl in Schulbüchern und didaktischen Beiträgen vor. In vielen Fällen sind nur wenige Änderungen notwendig, um entsprechende Vernetzungen zu erreichen.

Abschließend zu den <u>Grenzen</u>:

- Aufgabensysteme haben dort ihre Grenzen, wo die Aktivitäten der Schüler in keine bestimmte Richtung gelenkt werden sollen, also die Schüler Ziel und Weg weitgehend selbst bestimmen können. Darunter fallen vor allem Aktivitäten wie fächerübergreifender, projektorientierter Unterricht sowie Rollenspiele, Planspiele u. ä.

- Kein Aufgabensystem kann Anspruch auf "Vollständigkeit" o. ä. erheben. Der Versuch, möglichst "begriffserzeugende" Aufgaben zu konstruieren, erfährt allein schon durch die Frage, was man alles zum entsprechenden Begriff zählen soll, eine Einschränkung. Jedes Aufgabensystem ist somit in einem bestimmten Sinne reduzierbar und erweiterbar.
- Aufgabensysteme enthalten keine ausgesprochenen "Übungsaufgaben". In jeder Aufgabe werden neue Aktivitäten verlangt, neue Ziele angestrebt. Dadurch, daß der zu erwerbende Begriff aus verschiedensten Facetten betrachtet wird und vielfältige Aktivitäten durchzuführen sind, liegen eigentlich stets implizite Übungssituationen vor. Es ist jedoch klar, daß für spezielle Übungsaktivitäten neue Aufgaben konstruiert werden müssen, wenngleich die Schüler auch dabei - zumindest teilweise - aktiv eingebunden werden können.

Literatur

BROMME, R. (1986): Die alltägliche Unterrichtsvorbereitung des (Mathematik) Lehrers im Spiegel empirischer Untersuchungen. In: Journal für Mathematikdidaktik, Jahrgang 7, Heft 1, S. 3 - 22.

HARTEN, G. v./STEINBRING, H. (1985): Aufgabensysteme im Stochastikunterricht. Occasional paper 71. IDM Bielefeld.

KRAINER, K. (1988): Ein Aufgabensystem zur Erschließung des Winkelbegriffes. In: BENDER, P. (Hrsg.): Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter. S. 103 - 114. Cornelsen, Berlin.

KRAINER, K. (1989): Lebendige Geometrie. Überlegungen zu einem integrativen Verständnis von Geometrieunterricht anhand des Winkelbegriffes. Dissertation Universität Klagenfurt, erscheint 1989 bei Verlag Peter Lang, Frankfurt/Main-Bern-New York-Paris.

LAKATOS, I. (1979): Beweise und Widerlegungen. Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden.

MARKERT, D. (1979): Aufgabenstellen im Mathematikunterricht. Reihe "Mathematik konkret". Herder, Freiburg-Basel-Wien.

Pekka Kupari (Jyväskylä, Finland)

SOME FEATURES IN THE DEVELOPMENT OF GEOMETRY TEACHING

Abstract

The paper involves a short review of the changes that have occured in geometry teaching of the comprehensive school since 1970. An essential question is what has happened in geometry teaching in connection with curriculum reforms and what is the state of geometry teaching today. The review deals especially with two features: geometry as a whole and three-dimensional geometry. The analysis will also be illustrated by some research observations collected at the beginning of the 1980's. The paper finally elucidates both the needs of and views on reforms in geometry teaching and more extensively in the mathematics curriculum.

Introduction

In my paper, I shall discuss geometry teaching in Finland from the perspective of the curriculum and the school system (the comprehensive school). My intention is to provide a brief survey of the changes that geometry teaching has gone through during the reforms of the mathematics curriculum. From the point of view of the comprehensive school mathematics curriculum, the period from 1970 to 1985 represented a time of almost continuous change. The most reliable way of determining what changes have taken place in teaching would be an analysis of the teaching process (Leino 1984, 120), because the contents and methods of teaching are eventually chosen by the teacher. In Finnish schools there is, however, only one curriculum and a limited number of textbooks based on it. Therefore, we can obtain a comparatively reliable picture of the development also by examining changes in the contents of the curriculum and textbooks. I shall concentrate on two features of teaching: geometry

teaching as a whole and space geometry. This could be expressed in the form of a question: What kind of a picture does a comprehensive school pupil get of geometry - is it disintegrated rather than integrated, two-dimensional rather than three-dimensional?

Changes in the fundamentals of geometry teaching

Since 1970 there have been three significant changes in the comprehensive school mathematics curriculum. The first is known as "new mathematics". The second change took place in 1976, when core objectives, common to all pupils, were defined. The third important period is the year 1982, when a new official curriculum was finally introduced. As the fourth phase of change we could regard the issuing of the principles for the curriculum in 1985. Although the change in the contents of teaching was very small at the time, the introduction of the principles meant the implementation of the new school legislation and, hence, considerable changes in teaching practices took place. One important change was the fact that the extent of mathematics lessons on the 9th grade decreased from 4 to 3.

During the binary school system (primary school and secondary school) in the 1960s, mathematics teaching was very stable. For the first 5-6 years pupils were taught arithmetics, and after that, in grades 7 and 8 of the primary continuation school, arithmetics and geometry were taught as one subject. Only from grade 3 of the lower secondary school onwards was geometry taught as a separate school subject. At first it was mostly concerned with drawing and measuring, later on with deductive geometry and trigonometry (Leino 1975, 95-96). In teaching, the emphasis was on compasses-ruler constructions. The expressions of congruence, which in turn were a central tool in deductive geometry, were based on them (Paasonen 1982, 589).

The reform of mathematics teaching in 1970 meant dramatic changes:

1. The tripartition of teaching into arithmetics, algebra and geometry was abandoned and after that geometry was taught to all pupils from the first grade on. The aim was that by the time the pupils reached the fifth grade they would have learnt to master ordinary plane figures, to carry out simple descriptions of congruence and to use the compasses to some extent (Malinen 1971a, 24).
2. Euclidean, deductive geometry was abandoned.
3. The organization of subject matter was based on the spiral principle, according to which geometric subject matter was divided evenly over all school years.

Among the central reasons for these changes was the aim that a school which was meant for the whole age group should have mathematics suitable for the whole age group. Proving geometry was considered obsolete, useless and boring for pupils (Lehti 1980, 302) and therefore it had to give way to other, more interesting contents. It was also believed that a new kind of geometry teaching would make pupils think clearly and coherently (e.g. Leino 1975, 96).

Already fairly soon after the reform many experts expressed severe criticism on the changes. Some of them went as far as to speak of the 'collapse of geometry' and a 'completely unfounded step backwards'. Academician Nevanlinna, among others, asked in his article: "What will the pupils, who have completed their school education in the end understand about the integrated nature of mathematics, if the method of strict logical deduction is disregarded?" (Nevanlinna 1976, 22). Both in textbooks and teaching the spiral principle led to superficiality. Subject matter was again and again en-

countered in the same form; symbols, terms and concepts were all mixed up and no intergrated entities were formed. Already at that time, it was considered a grave problem that there was no overall planning of geometry teaching (Malinen 1971b, 142).

Classic, deductive geometry put so much weight on the teaching of planes, that the teaching of space included only a few problems and terms. This was unfortunate, as our physical environment is not generally two-dimensional but essentially three-dimensional. The pupil lives in this three-dimensional environment as a matter of course, therefore space geometry should be a part of the syllabus from the very beginning of the school. Skills of space perception should also be developed gradually in various contexts and in various ways, for these skills do not, as such, pertain to any particular school year or part of syllabus.

Since even the remaining space geometric subject matter was almost completely removed as a result of the reform, we had a situation where the school hardly at all prepared the pupils to encounter the normal three-dimensional world (Rosenberg 1977, 11).

Trimming the curriculum

The curriculum revision carried out in 1975-1976 was the first attempt to organize geometry teaching in the comprehensive school. This was manifested, for example, in that the subject matter was described in two-year sequences on the lower stage (grades 1-6) and at the end of the ninth grade. Also the structure of the geometric contents on the lower stage was presented in the form of a longitudinal section. This development phase did not, however, decidedly reduce disintergration in geometry teaching or reveal the overall structure of the subject matter, although the need to organize geometry teaching

had increased even further (e.g. Leino & Suominen 1979, 204).

Curriculum revision meant improvement in the teaching of space geometry in that subject matter was to some extent increased especially on the upper stage (grades 7-9). At the same time great emphasis was put on applications. The problem, however, was that in textbooks the space geometric contents was always placed at the very end of the course. This placement labelled the contents as supplementary and it was taught only if there happened to be enough time.

At the turn of the 1980s preparations were made for the reform of the mathematics curriculum. At the same time two extensive surveys of the teaching and learning of comprehensive school mathematics in Finland were initiated: The First National Survey in 1979 (e.g. Kupari 1983) and the Second International Study of Achievement in Mathematics of the IEA in 1981 (Kangasniemi 1989, in press).

The results of the national survey showed that at different grade levels (ages 10, 12 and 15 yrs.) pupils' knowledge of plane geometry (identification and characteristics of figures, measures of angles, areas etc.) was as good as the average knowledge of the subject matter in general (measured in terms of item solution percentage). The mastery of space geometry items, on the other hand, was on an average about 10-15% below that of plane geometry items (see Figure 1, p. 6). According to the results, also the drawing of familiar geometric plane figures proved unexpectedly difficult.

Respectively the results of the international study showed that, among the five content areas taught in comprehensive school grade 7, the mastery of geometry items was weakest, although the differences were not

great. Furthermore, the results showed that particularly the items, which made greatest cognitive demands (application items), were poorly mastered. Cognitively simple (geometric) items were mastered remarkably well compared with the corresponding items of the other content areas.

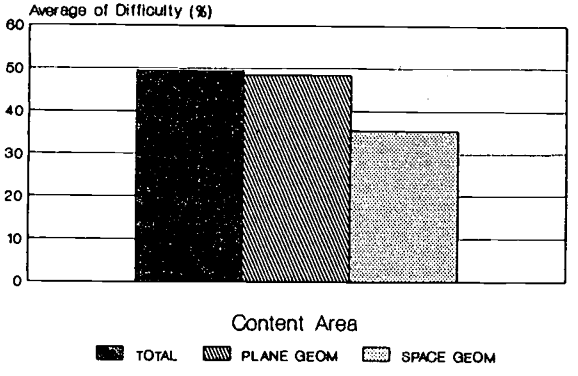


Figure 1. Pupils' average results in plane geometry and in space geometry compared with the total results of basic subject matter. The First National Survey / Grade 9.

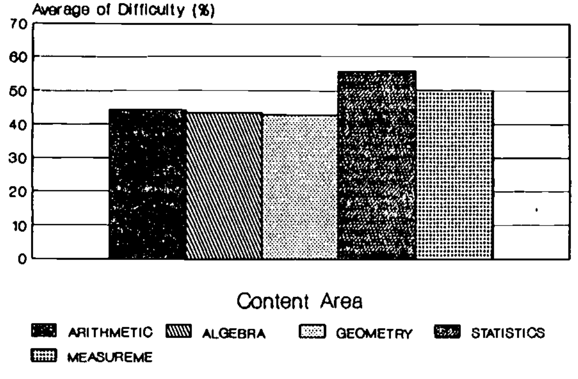


Figure 2. Pupils' average results on the five content areas. The Second International Mathematics Study / Grade 7.

In the case of some individual items, it was also

possible to study how they had been mastered during the binary school system in 1964 and in the comprehensive school in 1979 or 1981. As examples they illustrated more specifically , among other things, the relative positions of plane geometry and space geometry.

The above results clearly lend support to the picture of the teaching and learning of geometry transmitted through articles written at that time. An interesting question is therefore, what the 1980s have meant to geometry teaching. We shall know some answers to this question in a couple of years, because the next national survey will be carried out in the spring of 1990.

Geometry in the 1982 curriculum

The new 1982 mathematics curriculum was another attempt to improve geometry teaching. The syllabus did indeed contain several significant changes. The general aim was to strengthen the position of geometry teaching at both the lower and the upper level, and at the same time to specify the geometry subject matter. From the first grade on, the starting point of teaching was the three-dimensional environment and the perceptual world familiar to the pupil. In addition to this some individual changes were made in the contents. The above measures were, however, not transferred to a suffient extent to textbooks and teaching. According to some evaluation studies on textbooks, the geometry teaching following the reform was not at all satisfactory (e.g. Pehkonen 1982, 440). In this respect the curricular reform did not go beyond the level of aims and intentions, nor did it manifest itself in teaching practices.

The core curriculum for the comprehensive school, issued by the National Board of General Education in 1985, did not mean a change in the aims and contents of geometry teaching, but it did produced changes in the organization

of teaching and in the status of the curriculum. Sets (ability grouping) were abandoned and the time resource quota system was introduced, whereby municipalities and schools were able to arrange teaching the way they wanted. The introduction of the new system has resulted, among other things, in smaller teaching groups in mathematics, but at the same time also teachers having sometimes had to teach pupil groups of great heterogeneity.

Re-evaluation of geometry teaching

In the foregoing I have given a rough summary of the development phases of school geometry during some fifteen years. The above analysis also makes it possible to answer the question presented at the beginning on the formation of a geometric 'world view'. With some exaggeration and generalization we can say that the comprehensive school pupil hardly gets an overall conception of geometry. The picture obtained by comprehensive school pupils is also more two-dimensional than three-dimensional (more like a photograph than a hologram). We may, however, immediately add that in the case of space geometry there has been certain development in the right direction.

The actual change process shows very clearly how the geometric subject matter has been fragmented into small pieces. One may even get the impression that at no stage of 'reform' was there any serious attempt made to promote the formation of entities; orientation was more towards some isolated skills of recognition, naming and drawing. In fact, geometry was considered a light filler among the rest of teaching (Leino & Suominen 1979, 203). Therefore it is not surprising that pupils' experiences are haphazard and based on memory, and that pupils are unable to apply them.

A thorough re-evaluation of geometry teaching is necessary. It is now important to consider how this could best be achieved. Previous attempts have followed the 'from top to bottom' strategy (cf. Leino 1987, 10), according to which curriculum changes are made at the system level from where their influence is expected to 'radiate' to the teaching group level. According to the above analysis it has not proved to be a very successful strategy.

The development of the school's activities and teaching presupposes that the school and the teachers are given a much greater responsibility than they have now. In principle, some of this responsibility has already been delegated so that the municipalities and schools are now responsible for the writing of the curriculum and the distribution of teaching resources. However, it is not easy to delegate this responsibility so that it results in practical activities, but the numerous papers presented at this symposium are an excellent example of the various possibilities that exist for the implementation of geometry teaching. Noteworthy are, among other things, the extensive possibilities of computer applications in geometry teaching.

In addition to more vigorous local activity there is also a need for nation-wide guidelines: How can we balance the comprehensive school curriculum? What kind of entities are formed in geometry and how are they placed in the curriculum? At the same time we have to carefully evaluate the relevance of textbooks and other supplementary materials and equipments, and their approval procedures. Furthermore, it is necessary to consider, what kind of overall view the quarters responsible for the development of the field (school administration, teachers, textbook authors, researchers) have of the learning and teaching of mathematics.

The time is favourable for the discussion of all these aspects. Knowledge of mathematics learning and teaching in general has increased and expanded enormously during the last ten years. There are also both national and international data available for the organization of school courses in geometry. For example in Finland, several quite thorough proposals for the general outline of geometry teaching have been made since the late 1970s (e.g. Rosenberg 1978; Leino & Suominen 1979; Pehkonen 1982b). In them geometry is arranged into functional entities or themes with suggestions for grades where the entities could be taught. At present there are also extensive preparations being made for the next reform of mathematics teaching. The national Commission on Basic Education in Mathematics and Science is giving the finishing touches to its final report, which includes a program of activities for the development of teaching. Undoubtedly, it will also discuss the position of geometry in the teaching of school mathematics.

References

Kangasniemi, E. 1989. Opetussuunnitelma ja matematiikan koulusaavutukset. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja A. Tutkimuksia 28. (In press).

Kupari, P. 1983. Millaista matematiikkaa peruskoulun päättyessä osataan? Yhdeksäsluokkalaisten oppimistulokset keskeisessä matematiikassa. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisuja 342.

Lehti, R. 1982. Matematiikan opetuksen ristipaineita. Matemaattisten aineiden aikakauskirja 44(5), 299-303.

Leino, J. 1975. Matematiikan opetuksen uudistuksesta. Matemaattisten aineiden aikakauskirja 39(2), 95-97.

Leino, J. & Suominen, K. 1979. Kysymyksiä peruskoulun matematiikassa. Matemaattisten aineiden aikakauskir-

ja 43(4), 203-205.
Leino, J. 1984. Koulumatematiikan opetuksen nykytilanteesta ja kehityssuunnista. Matemaattisten aineiden aikakauskirja 48(2), 119-124.
Leino, J. 1987. Matematiikan didaktiikan kehityssuunnista. Dimensio 51(7), 10-12.
Malinen, P. 1971a. Matematiikan opetuksen uudistaminen oppikoulun alaluokilla. Matemaattisten aineiden aikakauskirja 35(1), 18-24.
Malinen, P. 1971b. Matematiikan opetuksen uudistamisen heikkouksia. Matemaattisten aineiden aikakauskirja 35(3), 138-144.
Nevanlinna, R. 1976. Matematiikan opetuksen tavoitteista. Matemaattisten aineiden aikakauskirja 40(1), 13-23.
Paasonen, J. 1980. Geometrian opetuksen tavoitteet ja niiden toteutuminen. Matemaattisten aineiden aikakauskirja 46(6), 589-592.
Pehkonen, E. 1982a. Geometrian opettaminen yläasteella: Osa II. Matemaattisten aineiden aikakauskirja 46(2), 181-186.
Pehkonen, E. 1982b. Geometrian opettaminen yläasteella: Osa IV. Matemaattisten aineiden aikakauskirja 46(5), 433-440.
Rosenberg, E. 1977. Geometria matematiikan opetussuunnitelmassa Osa I. Matemaattisten aineiden aikakauskirja 41(1), 7-13.
Rosenberg, E. 1978. Geometria matematiikan opetussuunnitelmassa: Osa II. Matemaattisten aineiden aikakauskirja 42(1), 7-14.

Olof Magne (Malmö, Sweden)

PRESCHOOL GEOMETRY

Abstract
Leading educationalists have mainly interested themselves in preschool children's free play. Early learning should perhaps also include more structured activities. Visualisation and movement education seem important, including visual-motor coordination and rythm, flexibility of body awareness, balance and, in addition, figure-ground activities, perceptual constancy exploration, space discrimination and understanding spatial relationships. Referring to his own studies, the author suggests that we have neglected research on early education in the field of geometry.

Form and space conception of the preschool child

The main aim with this paper is to give suggestions how to strengthen the preschool mathematics education, now nearly non-existent in most countries. I like to discuss geometry before the age of Piaget's main writings on space and geometry and before van Hiele's "stage zero". My studies on these problems refer to the Scandinavian horizon. In this paper preschool education is defined as systematic tuition from birth up to the age of about seven.

Unfortunately, the research literature on preschool geometry seems to be rather scarce.

Noteworthy studies on form and space conceptions of the preschool child have been conducted by, for instance, Ames et et al. (1979), Frostig & Horne (1964), Frostig (1974), and Frostig & Maslow (1973), Gesell & Amatruda (1947) and Sandels (1956) who investigated the adaptive behaviour from birth and onward with methods of longitudinal measurements. These are by no means the first studies, but most of them concern the school child, for instance Piaget and his collaborators. His work has however been critisised lately (cp. Freudenthal, 1973, Martin, 1976, and Donaldson, 1978). Also the work of van Hiele & van Hiele (1957/1984) deserves particular notice. Early analyses of geometric visualisation were made by researchers as Ballard

(1936), Binet & Simon (1911), Blumenfeld (1923), Fröbel (1887), Montessori (1912), and Stern (1922). More recent treatises are published by Ball, Costello & Küchemann (1983), Bishop (1980), Gran (1982), Hollis (1981), Lesh (1978), Magne (1989), Martin (1976), Morris (1962), Robinson (1975), and Robinson, Mahaffey & Nelson (1975).

Gesell studies show that positive responses to cube occur in infants before the age of 6 months. Construction exists at least before 1½ years. At 2 the child places blocks correctly in the 3-hole formboard and at 3 adapts at once to reversal to board. According to Sandels (1956) the child classifies two types of geometric objects at 2½-3 years and 4-5 types at 4-5 years. In children's spontaneous scribble, the first recognisable forms are circle, before 18 months, and quadrilateral, at about 2 years. Spontaneous triangle may appear at 3-4 years and rhomb not earlier than at 6-7 years. Copying a model (translation) is reported successfully by Piaget & Inhelder (1947): curved closed figure at 2½ and more complex figures at least at 7 years. This task was also studied by Gibson, Gibson, Pick & Osser (1962). They concluded that young children did not identify digit-like or letter-like patterns as different or similar in transformations, like rotations and reflections. From the age of four to the age of eight errors of rotation and reflection decrease, slower for reflection than rotation.

The inference from these investigations is that even very young children are able to adapt themselves quite well to situations which call for manual dexterity, visual discrimination and spatial insights. An important conclusion is the following. The development is first of all due to increasing mastery of complex mental processes which may well be called general ability or spatial ability.

I will suggest that this child is fit for tutoring as soon as he displays adaptive behaviour in certain respects to the environment and that he can learn from well designed learning

programmes which are launched at the proper moment and conducted by the tutor with feeling and understanding.

On the other hand, neglect of tutoring at critical periods of growth may lead to correspondingly unfortunate consequences with a variety of cognitive deficits.

A project on preschool mathematics

From 1983 to 1986 a project was carried out with the intention to make the transition from preschool to primary school easier for both children and adults. The project was located to a district of Malmö, Sweden. The background was as follows. Interviews with teachers in preschools conveyed the impression that the mathematical activities in preschools were to a great extent imitated from the curriculum of the primary school. The teachers were used to number exercises of a school book character, rather than to activities typical for the preschool.

Allendoerfer (1969) stresses that there are two symptoms of crisis in school geometry that need be set right, namely the poor performance of the pupil and how to present geometry to the pupil (cp. Magne, 1988 a and b, Third National Assessment, 1983, and Usiskin, 1987). This seems to be true also to the preschool.

The Malmö preschool project was based on a theory of processes in learning/teaching elementary mathematics, presented by Magne & Thörn (1987). For details, I refer to the Magne-Thörn report and a still not published report in English.

Magne & Thörn suggest that three "main areas" of mathematics learning/teaching are particularly interesting for preschool mathematics:

* P-area: Linguistic representation and problem solving,
* N-area: Numeration and notation, and
* G-area: Form perception and space representation, body

awareness, spatial reasoning and, to some extent for the preschool child, money, geometry, measuring and units.

The teacher's picture book on preschool mathematics

The discussion in our preschool project (Magne, 1988b) on principles for the tutoring of preschool children in mathematics brought to the result that we

* must start with the needs, interests and ability of the individual child.
* have to individualise the activities.
* nevertheless prepare a core of topics which would be considered more or less universal and built upon the Magne-Thörn category system.
* should have a supply of additional activities in stock which could be used in connection with the core topics.
* as often as possible plan to depart from sudden questions or impulses of the children, and even the core topics and the additional activities should allow meeting this aim.
* find it practical to wave the idea to use a textbook.

We chose a "spiral format" for the planning of the programmes. The result was a book we called The teacher's picture book on preschool mathematics (Magne, 1986), furnished with descriptions of activities suitable for the preschool children and covering the mathematical development from about 2-3 years up to 7 years. These activities should differ in complexity and be grouped into three parts, or spirals: Spiral 1 containing basic activities that were easy to understand and easy to perform, and Spirals 2 and 3 having gradually higher degrees of complexity.

The first edition contained

* Introductory recommendations,
* Comments on each one of the three "spirals", and

* 64 activity pages, distributed in the following way: P-area 17, N-area 25 and G-area 22.

In a revised edition, still under preparation, the number of activity pages has increased, for instance to 30 within the G-area. The activity pages contain suggestions concerning conversation, tasks, games, songs, stories, nursery rhymes and rhythmics. The activities in the G-area have the following headings.

Spiral 1

1. Formboard and puzzle.
2. Free play with objects, free drawing, painting, pasting, and building with toy bricks etc.
3. Naming parts of the body - body-object relationship.
4. Body awareness and movement.
5. Sorting things, also geometric solids and figures - logical blocks.
6. Responses to directions with position and location words: tell me how you can find where the ball is, using words like "near"/"far from", "above"/"under", "behind"/"in front of" etc.
7. Modelling.

Spiral 2

8. Sharpening the power of observation - Kim's game.
9. Hide the key - concealed things.
10. Construction play with educational toys (lego, meccano).
11. Play catch with a beanbag or a ball.
12. Skipping and hopscotch.
13. Finding things with the same/different size, length, weight, volume.
14. Heavy or light - do they sink in water - equal or unequal/same or different.
15. Time - the daily dose.
16. Draw a man.
17. Figure-ground activities.
18. Identify money.

Spiral 3

19. Balance - bodily control.
20. Right and left.
21. What are the blocks called? e.g. sphere, cube, cylinder, pyramid.

22. What are the pictures called? e.g. circle, square, rectangle, triangle.
23. Fold a paper from model or instruction. Paper cuts.
24. Build two equally high towers, equally long walls, equally wide houses - or unequal high towers etc.
25. Draw a house, a mountain with trees and a house, a glass with water - with discussion how real things look.
26. Translation: Draw from a model, copy a picture in a net of dots; also build a tower from a model.
27. Translation: Draw from a template; also cut from a pattern etc.
28. Reflection: drawing from model or from memory - symmetry.
29. Play ball with a racket/bat etc.
30. Making cardboard models.

In addition to these activity pages which have been attributed to the G-area, there are activities assigned to the P-area concerning communication, conversation and vocabulary, for instance the following ones:

In spiral 1: Respond to directions concerning

over/under, in/out, open/closed, up/down, on/off, stop/go, fast/slow,

or to identify objects

big/small/little, on top/at bottom, all/empty, long/short, forward/backward, toward/away from, in the middle, between, tall/short, large/small, wide/narrow, first/last, inside/outside, in front of/behind etc.

In spiral 2: Respond to expressions as

each/none, same, equal, like/different, unlike, similar, the... but one, first/second/third, next but..., the next, the following

and to identify objects or events that are

highest/lowest, largest/smallest, longer/longest etc.

The Teacher's picture book has been tried out partly in ordinary tutoring, by the preschool teachers, partly through systematic testing of various activities. Both teachers and children have appreciated the general design and, with few exceptions, expressed their approval and liking (Magne, 1988b).

Concluding remarks

All of us human beings learn from our experiences of real events in a real word that surrounds us. The children's explorative instincts activate their movements and observations. WHAT?...

What is large? - What is small?
What is straight? - What is twisted? curved?
What is near? - What is far away?
What is heavy? - What is light?

The preschool children are permanently busy with the training of their muscles and senses. But some children get more opportunities than other children. Those who come from disorganised backgrounds may even have lost motivation for solid accomplishment. These children are often disorganised in their conduct, by turns uncooperative, idle and inactive or aggressive, hyperactive and rowdy, due to mismanaged upbringing, psychic inhibition or physical impairment. It is an imperative task to help them energetically and to literally guide them by putting activating material in their hands, with warmhearted and stimulating tutoring. This tutoring must begin early. It may be too late if you start geometry when school begins.

The preschool mathematics learning processes would comprise the following three main areas:

P: Linguistic representation and problem solving
N: Numeration and notation
G: Spatial thinking, form perception and space representation, body awareness, money, and glimpses of geometry, measuring and units.

The linguistic ability is not the only mental aptitude to unfold. There are important elements of non-linguistic adaptation to spatial experiences to promote the growth of. This is the G-area.

Current curricular efforts are characterised as a search for balance. We should consider the many factors involved in mathematics: the subject matter, the pupil's reactions, the instruction, the full implication of what it means to learn mathematics. This balance has many aspects:

* Balance between main areas
* Balanced view of learning and instruction
* Balanced emphasis on experience, thinking and applications
* Balanced use of instructional aids, and
* Balanced attitudes to the organisation of instruction.

We have noticed that our "mathematics plays" which constitute the contents of "The teacher's picture book on preschool mathematics" were attractive to children as well as teachers. The young children wanted experiences about forms, shapes and space under playful conditions, point to the correct objects in an ordered sequence, share sweets with "my little brother", draw geometric figures, solve riddles and puzzles or "story problems".

We may regret that research of what preschool children do and can do is imperfect in the G-area. Let us think of this fact as a challenge.

I hope that in the future didactic research of mathematics and the preschool child's mind will be intensified. It is necessary that child psychology will be linked more closely to mathematics education. From such mutual efforts it should be possible to work out a sound and sensible basis for preschool practices.

References

Allendoerfer, C.B. The dilemma in geometry. Mathematics Teacher 1969, 62 (3), 165-169.

Ames, L.B., Gillespie, C., Haines, J. & Ilg, F.L. The Gesell Institute's child from one to six. New York: Harper & Row, 1979.

Ball, A.W., Costello, J. & Küchemann, D. A review of research in mathematical education. Part A. Research on learning and teaching. Windsor, United Kingdom: NFER-Nelson, 1983.

Ballard, Ph.B. Geometry: its value and its methods, Brit. J. Educ. Psychol., 1936, 6, 23-42-

Binet, A. & Simon, Th. Nouvelles recherches sur la mesure du niveau intellectuel chez les enfants d'école, Année Psychol., 1911, 17, 145-201.

Bishop, A.J. Spatial abilities and mathematics education, Educ. Student Mathematics, 1980, 11, 257-270.

Blumenfeld, W. Untersuchungen über die Formvisualität, Zschr. Psychol., 1923, 91, 1-82, 236-292.

Donaldson, M. Children's minds. London: Croom Helm, 1978.

Freudenthal, H. Mathematik als pädagogische Aufgabe. Bd. 1-2. Stuttgart: Ernst Klett, 1973.

Frostig, M. Movement education: Theory and practice. Chicago: Follett Educational Co., 1972.

Frostig, M. & Horne, D. The Frostig program for the development of visual perception. Chicago: Follett Publ. Co., 1964.

Frostig, M. & Maslow, Ph. Learning problems in the classroom. New York: Grune & Stratton, 1973.

Fröbel, F. The education of man. New York: Appleton, 1887.

Gesell, A. & Amatruda, C.S. Developmental diagnosis. 2nd Ed. New York: Paul B. Hoeber, 1947.

Gibson, E.J., Gibson, J.J., Pick, A.D. & Osser, H. A developmental study of the discrimination of letter-like forms, J. Comp. Physiol. Psychol. 1962, 55. 897-906.

Gran, B. Från förskola till grundskola. /From preschool to school./ Lund, Sweden: Gleerup, 1982.

van Hiele-Geldof, D. De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O., 1957. See: Translation into English: Geddes, D., Fuys, D & Tischler, R. English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre van Hiele. Washington D.C.: Res. in Science Educ. (RISE) Program of the National Foundation, Grant No. SED 7920640: NSF, 1984.

Hollis, L.Y. Mathematical concepts for very young children, Arithmetic Teacher, 1981, 29 (2), 24-27.

Lesh, R. Recent research concerning the development of spatial and geometrical concepts. Columbus, Ohio: 1978.

Magne, O. Lärarbilderboken om förskolans matematik./Teacher's picture book on preschool mathematics./ Malmö, Sweden: Lindängeskolan, 1986.

Magne, O. Försök med integrerad matematikundervisning på lågstadiet./Developmental work on integrated mathematics education in grades 1-3./ Utvecklingsarbete och fältförsök (Malmö: Lunds universitet, Lärarhögskolan i Malmö). Rapport 3, 1988 (a).

Magne, O. Förskolebarn leker matematik med lärarkandidater. /Preschool children play at mathematics./ Utvecklingsarbete och fältförsök (Malmö: Lunds universitet, Lärarhögskolan i Malmö). Rapport 9, 1988 (b).

Magne, O. An experiment on preschool geometry. Didakometry Malmö, Sweden: School of Education, No...., 1989. (To be published.)

Magne, O. & Thörn, K. En kognitiv taxonomi för matematikundervisningen. /A cognitive taxonomy for the elementary mathematics education./ Pedagogisk-psykologiska problem (Malmö, Sweden: School of Education). No. 471-472. 1986.

Martin; J.L. An analysis of some of Piaget's topological tasks from a mathematical point of view, J. Res. Mathematics Educ. 1976, 7 (1), 8-24.

Montessori, M. The Montessori method. New York: Frederik A. Stokes, 1912.

Morris, D. The biology of art. London: Methuen, 1962.

Piaget, J. & Inhelder, B. La représentation de l'espace chez l'enfant. Paris: Presses Universitaires de France, 1947.

Robinson, G.E. Geometry. In: J.N. Payne (Ed.) Mathematics learning in the early childhood, 37th Yearbook of NCTM. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, 1975, P. 205-225.

Robinson, G.E., Mahaffey, M.I. & Nelson, I.D. Measurement. In: J. N. Payne (Ed.) Mathematics learning in the early childhood, 37th Yearbook of NCTM. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, P. 227-250.

Sandels, S. Utvecklingspsykologiska beteendestudier hos barn i åldern 1½ - 8½ år. /Behaviour studies in developmental psychology of children aged 1½ to 8½ years./ Uppsala, Sweden: Appelbergs bokhandel, 1956.

Stern, W. Der Formvariator. Ein Hilfsmittel zur Prüfung und Erziehung der dynamisch-geometrischen Raumauffassung, Zschr. f. pädag. Psychol, exp. Pädagogik und Jugendliche Forschung 1922, 23, 131-137.

The third national mathematics assessment: Results, trends and issues. Report No. 13-MA-01. Denver: Educational Commission of the States, 1983.

Usiskin, Z. Resolving the continuing dilemma in school geometry. In: M.M. Lindquist & A.P Shulte (Eds.) Learning and teaching geometry, K-12, 1987 Yearbook of NCTM. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, 1987. P. 17-31.

George Malaty, University of Joensuu, Finland
DO WE STILL NEED EUCLID?

Dieudonne's slogan "Down with Euclid" still affects the work of mathematical educators. The first 9 grades tends to offer some rules and exercises of calculating areas and volums. Some educators try to emphasize the role of problem-solving in mathematical education. The geometric problem-solving examples proposed by some educators show the need to aquire a theoretical structure of geometry, especially the Euclidean one. Euclidean geometry is needed to give a model of the beauty of mathematical structure in a simple spatial way.

0. Two Milleniums and Two Decades

Greek philosopher and pupil of Socrates (c.470-c.400 BC), the Athenian teacher Plato (429-347 BC) wrote over the entrance to his school "Let none ignorant of geometry entry my door". Greek geometry, which Plato appreciated, was a deductive axiomatic geometry.

The contributions of Pythagoras (c.580-c.500 BC) and his students to geometry offered geometry of quite rigid deductive structure. The logic of deductivity made the Pythagoreans underline the role of axioms in building structures. Plato's enthusiasm for geometric structure gave him responsibility for the system of definitions, postulates and axioms presented by Euclid (c.365-c.300 BC) later.

Euclidean geometry had a profound influence on the intellectual development of the human race (Bell, 1978, 45). This was the case since the establishing of Euclid's school at Alexandria and even a few centuries before. In the last 2-3 decades, the long life traditional Euclidean geometry, of more than 2000 years, has disappeared from the school textbooks to make place for other attempts of innovation in geometry education. Jean Dieudonne's slogan "Down with Euclid" has special influence on this direction.

1. New Math and Euclidean Geometry

At the time of the "new math", the word "new" and its magic

made everybody, especially the mathematics teachers, accept Dieudonne's slogan.

WHY?

The next truth table explains the situation:

Let A = New math is new

and B = Euclidean geometry is new.

THUS

A	B	A & B
T	F	F

Table 1

The connective "and" shows that the statement "New math and Euclidean geometry are new (A & B)" is FALSE. This logic leads to the conclusion; "In new math curricula there is no place to Euclidean geometry". That is why Dieudonne's slogan acted as a true statement.

IT WAS EASY TO DESTROY

At the time of the "new math", the teachers heard about the non-Euclidean geometries, but this didn't make them ask the leaders of the "new math" to include non-Euclidean geometries in the school textbooks.

WHY?

The following answers are reasonable:

1) They felt that non-Euclidean geometries must be so difficult that it can't be in a school mathematics.

It was difficult to many to teach Euclidean geometry. What about the non-?

2) They thought that Transformation geometry, which some textbooks included, is non-Euclidean geometry.

They didn't notice that the transformation geometry is just an approach (sophisticated) to the Euclidean geometry.

3) They were busy in attending intensive in-service education to manage the task of teaching other new topics (Today they are busy with computers' courses).

On the other hand the teachers became ready to accept the disappearance of the traditional Euclidean geometry and

to believe that; "Transformation geometry" and "Vector geometry" are better than the traditional Euclidean geometry. If we ask WHY?, the answer is not difficult to find. Beside the affect of Dieudonne's slogan, they heard enough about Euclidean geometry's defects and they had troubles in teaching Euclidean geometry.

Moreover, the time of the new math was the time of warm slogans, at the beginning of the era of the media, after the launching of the sputnik in 1957. Mathematics education became the tool to gain the race in the space. The President of ICMI, Marshall Stone wrote to the teachers about "The Revolution in Mathematics" (Stone, 1961, 304-327) and Benjamin DeMott wrote about "The Math Wars" (DeMott 1962, 296-310). In such atmosphere the teachers became less confident in their qualification. Thus, they couldn't confront the reform proposals including the cancellation of the traditional Euclidean geometry (Malaty 1988a,57-65). They had only to obey and follow the leaders of innovation, not to argue with them.

2.The Defects of the Euclidean Geometry and the Teaching of Geometry Today

What was the most serious criticism to the Euclidean geometry as a structure?

As the axioms of Euclid weren't enough to build rigorous logical structure, he used sometimes INTUITION AND VISUALIZATION. Do our textbooks at the moment care about the logical structure of geometry? This needs a special discussion.

To improve the defects of Euclid, we have for instance the next 3 well-known alternatives:

1) The axiomatic system of Hilbert,

2) The axiomatic system of Birkhoff and

3) The axiomatic system of Pogorelov.

There is only one place known to the writer, in which such improvements have been done. The place is the USSR, where A. Pogorelov himself in 1984 wrote the geometry textbook

for grades 6-10, age 12-16 (Pogorelov 1988). This also was done there before in the textbooks of A.Kolmogorov (Kolmogorov 1971 & Kolmogorov 1978).

We have to notice that any of the mentioned above improvements do not change the Euclidean geometry into non-Euclidean geometry. The part of "Affine geometry" in some textbooks at the time of the new math presented rigorous axiomatic alternative of Euclidean geometry. The pedantary Affine geometry has disappeared from the textbooks and the common tendency is; intuition and visualization under the auspices of the slogan "Geometry for All".

Our work in the last three decades can make any outsider observer doubt in our profession. We first criticized Euclid because of using intuition and visualization, now we are doing the opposite; we put emphasis on intuition and visualization. In a reaction to the few pages of "Affine geometry" in some textbooks, we emphasize visualization. The deeper reason is more general; the reaction to the formal structure of the "new math" curricula. Dieudonne's slogan made the textbooks of the "new math" free from traditional Euclidean geometry. The "back-to-basics" didn't bring back the traditional Euclidean geometry. The new generation of teachers, especially at primary schools, know nothing about Euclidean geometric structure. They are teaching and writing in their textbooks geometric topics, which are in fact Euclidean ones, only poor ones. The name of Euclid is omitted and even unknown to them. The influence of Dieudonne's slogan has made remembering Euclid a taboo.

DO WE NEED INTUITION AND VISUALIZATION?

We need intuition and visualization to solve many problems in our life, therefore the using of intuition and visualization in the education of geometry is acceptable. On the other hand, we can't accept geometry education, which is based on visualization.

The intuition and visualization on the level of Euclid

is reasonable. Moreover we can't cancel the traditional Euclidean geometry.

WHY?

We shall give two reasons in brief and then discuss them in more details. These reasons are: 1)The non-Euclidean geometries can not replace the Euclidean one, 2) Problem-solving needs geometric structure and Euclidean structure at the first place.

3.1. The Non-Eucldean Geometries Can Not Replace the Euclidean One

WHY?

1) Euclidean geometry's axioms are:

The first 4 axioms of Euclid & the 5th axiom (of Euclid)

T (true) T

T

Fig.1

Thus, we have basic five true statements to build a space structure (Euclidean).

2) Jânos Bolyai (1802-1860)/Nikolai Lobachevski's (1792-1856) axioms are:

The first 4 axioms of Euclid & their 5th axiom

(equivalent ones) T T

T

Fig.2

These five assumed to be true statements offer the base of another space structure.

3) The same for Georg Riemann's (1826-1866) axioms and space structure.

This shows that: The Euclidean geometry as a structure(system) has equal rights to exist as the so-called non-.

MOREOVER

At school, Euclidean geometry has more rights than the so-called non-Euclidean geometries.

WHY?

Because it is more closed to the students' physical world. From the plane geometry of simple figures to the solid geometry, in building the Euclidean space structure.

3.2.1. Problem-Solving Needs Geometric Structure: The problem of problem-solving

Where different mathematical educators have been of the opinion that problem-solving has to be the focus of school mathematics in the 80s (ANOTHER SLOGAN), the following well-known example shows that we still need the traditional Euclidean geometry:

"Two squares, each of length s on a side, are placed so that THE CORNER of the one square lies in the centre of the other, as shown (fig.3). Describe in terms of s the range of possible areas representing the intersection of the two squares".

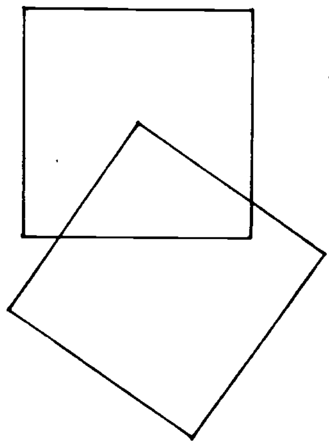


Fig.3

To solve the problem, the following plan was recommended:

"Imagine having two QUADRANGLE beer mats. You place one of the mats in the centre of the other and turn it around this point".

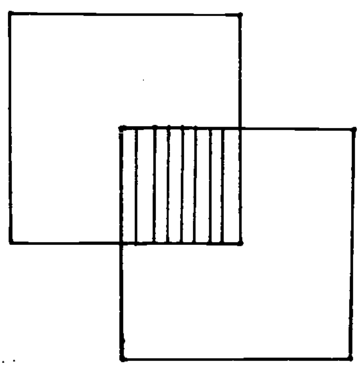


Fig.4 Case (1)

The next two special cases

(fig.4 and fig.5) are expected to be observed. In both cases the formula $A = \frac{1}{4} s^2$ is expected as a result of visualizations. Up to the moment the writer has to make the next notices:

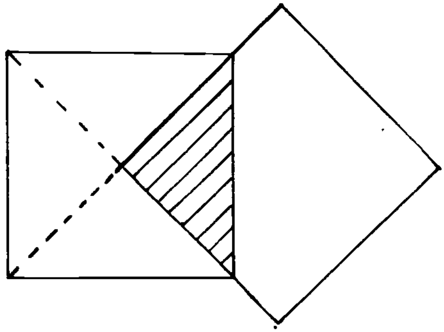


Fig.5 Case (2)

The underlined above phrase and sentence are of TYPICAL EUCLIDEAN THINKING: "superposing one figure upon another to find out intersection or congruency".

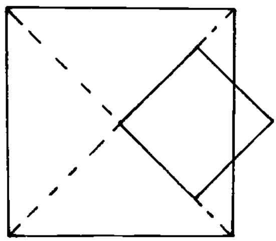


Fig.6

MOREOVER

The writer gives the next questions:

1) Why the second case can not look like fig.6?
2) Are the shaded areas in the two cases equivalent?

To answer these questions, the student has to acquire systematic structure. The third question of the writer here is: Is it true that visualization is enough to find out the formula $A = \frac{1}{4} s^2$ or WE STILL NEED SYSTEMATIC STRUCTURE? The writer agrees that some students can find out the formula by guessing, but they need to acquire systematic structure to be sure in themselves. Their guesses need structure to be turned into certain results.

May the reader still doubt about the need to acquire

systematic structure. The 3rd case (the general case) can show this need better.

If we recall our experience with case (1), "we get the following figure" (fig.8). (Again the underlined phrase reflects TYPICAL EUCLIDEAN THINKING.)

In a heuristic way the students notice that the triangles CVU and CYX are congruent. Thus the quadrangles XZUC and YZVC are equivalent.

This discovery can be guided, where the idea of figures' equivalency is of TYPICAL EUCIDEAN THINKING.

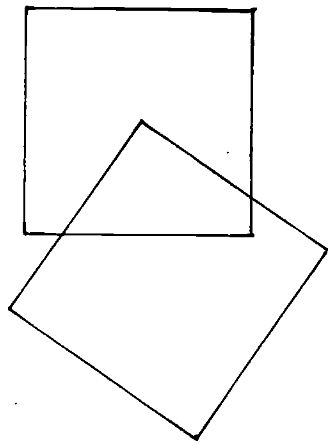


Fig.7 Case (3)

The fourth question, which the writer has to discuss is: Why the triangles CVU and CYX are congruent? VISUALLY? IS IT ENOUGH? Fifth question is: Can case (2) replace case(1) in discussing the general case (case 3)?

In answering these 5 questions, we MATHEMATIZE;

BUT

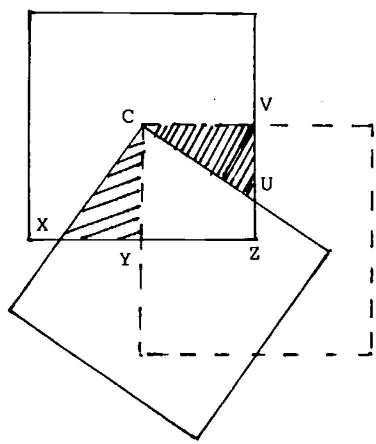


Fig.8

HOW WE CAN DO IT? We need to refer to systematic structure. Felix Klein's (1849-1925) transformations can help, but

it can't replace the traditional systematical approach of Euclid at school. We need to introduce the transformation ideas in some cases because it adds to the human culture another kind of thinking. The question is : WHEN? and HOW MUCH OF IT?

In our discussed example the using of transformation approach is not recommended. A rotation of 90^{o} to the set of points of the angle XCY (fig.9), shows easly that the ray $\overrightarrow{CY}$ should take the direction of the ray $\overrightarrow{CV}$ and the ray $\overrightarrow{CX}$ should take the direction of the ray $\overrightarrow{CU}$. The discussing of the congruency of the point Y upon the point V needs acquisition of Euclidean structue. The congruency of the point X upon the point U can be discussed on a transformation basis, but in a very artificial way. It is artificial, complicated and even pedantary, beside the fact that transformation approach is not separate from Euclidean geometry. **The congruency of the triangles on traditional Euclidean basis is simple and direct**, that is why the school geometry has to be built mainly on basis of traditional Euclidean structure.

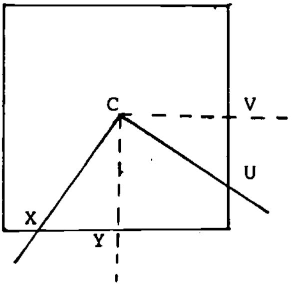


Fig.9

4. Final Remarks

The problem-solving example discussed here, or equivalent one, had been proposed by different mathematical educators, among others Bernd Zimmermann (Zimmermann 1985). The problem is appropriate to junior secondary school students. Our discussion showed that such problem needs at first place; acquisition of Euclidean structure. This also mentioned by Zimmermann, when he spoke about the using of the congruence theorem ASA of the finnish syllabus (Zimmermann 1985). This was also clare in George Pólya's writings since "How To Solve It" of 1945 (Pólya 1948). Moreover,

Pólya confirmed that: "...Euclid's level is fully scientific." (Pólya 1987, 4). Within the simple spatial traditional Euclidean structure, students of junior secondary school can taste the beauty of mathematical deductivity and can be sure in their solutions to geometric problems. The language of the traditional geometry is useful, even in dealing with non geometric problems; "GIVEN", "TO PROVE", "SINCE", "THEREFORE" and "Q.E.D.". In our discussed problem-solving example, in capital letters the writer used the names "corner" and "quadrangle" as some educators proposed; but in one hand the development of students' accuracy belongs to the general goals of teaching mathematics and on the other hand the names "vertex" and "square" are not more difficult than"corner" and "quadrangle".

At the end we add two remarks. First one: The acqisition of Euclidean geometry facilitated the discovery of at least; "coordinate geometry", "vector geometry", "trigonometry" and "calculus", therefore the students' rediscovery needs this acquisition. The second is: With the absence of real Euclidean geometry, the textbooks keep the students calclating areas of even figures, which do not exist "...hypotenuse is 8 cm and the opposite height is 5 cm." (Asikainen 1984, 188). YES WE NEED EUCLID: Euclid's structure, language and thinking.

References

Asikainen, V. et al. 1984, Peruskoulun matematiikka 7, 7.painos,Otava.
Bell, F. 1978, Teaching and Learning Mathematics (wcb: Dubuque).
Chernysheva, L. and Firsov, V. 1986, Teaching geometry in the USSR.In: Studies in Mathematics Education, Vol.5, 97-106 (Unesco: Paris).
Demott, B. 1962, The math wars, The American Scholar, Spring Issue.
Kolmogorov, A. 1971 et al., Geometrya, uchebnoe posobie dlya 6 klassa srednei shkoly (Prosveshchenie: Moskova).
Kolmogorov, A. 1973 et al., Geometrya, uchebnoe posobie dlya 8 klassa, srednei shkoly (Prosveshchenie: Moskova).
Malaty, G. 1988a, What is wrong with the 'back-to-basics' movement,and what was wrong with the 'new math' movement, Int.J.Math.Educ.Sci. Technol., Vol.19, 1,57-65.
Malaty, G. 1988b, Matematiikan opetus Neuvostliitossa. In: Teoria ja käytäntöä, 27,107-127.
Pogorelov, A. 1988, Geometrya, uchebnoe posobie dlya 6-10 klassov srednei shkoly (Prosveshchenie: Moskova).
Pólya, G. 1948, How To Solve It, Fifth printing, Princeton Uni.Press.
Pólya, G. 1987, On solving mathematical problems in high school. In: 1980 Yearbook,NCTM, 4th printing, 1-2.
Stone, M. 1961, The revolution in mathematics, Liberal Education, 47, 304-327.
Zimmermann, B. 1985, From problem solving to problem finding in mathematics instruction. In: Theory Into Practice, 3.

Kurt Peter Müller (Karlsruhe, BRD)

Acht kongruente Würfel – Vom Bauen mit Bauklötzen zum systematischen Suchen beweglicher Ringe

1. Zusammenfassung

Acht kongruente Würfel lassen sich bekanntlich zu einem großen Würfel doppelter Kantenlänge zusammensetzen. Auf der MNU-Tagung 1988 in Kiel waren zwei solche "große" Würfel aufgestellt, bei dem die Einzelwürfel derart in "Scharnieren" gegeneinander zu bewegen waren, daß man sie auf eine zweite Weise wieder zu einem Würfel zusammensetzen konnte. Diese Anordnungen sollen systematisch untersucht werden. Insbesondere soll auch nach der Zahl der verschiedenen Lösungen gefragt werden.

2. Präzisierung der Problemstellung

Läßt man Schüler frei mit Würfeln agieren, so ergeben sich schon im Vorschulalter Aktivitäten. Sollen bestimmte Formen nachgebaut werden, steigt der Schwierigkeitsgrad. Daran soll nun weiter überlegt werden. Auf der MNU-Tagung 1988 in Kiel (KÜHL) waren zwei solche Würfel aufgestellt, bei dem die Einzelwürfel so in "Scharnieren" gegeneinander zu bewegen (zu klappen) waren, daß man sie auf eine zweite Weise wieder zu einem Würfel zusammensetzen konnte.
Schon die ersten Überlegungen, wie viele solche Zusammensetzungen es gibt, zeigten, daß man dieses Problem exakter formulieren muß. Die Literatur brachte Hinweise (z.B. JENKINS / WILD), führte aber nicht weiter.

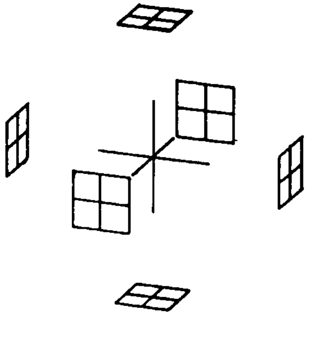


Fig. 1

2.1 Wann liegt eine neue Anordnung vor?
Um sicher zu sein, daß wirklich eine andere Anordnung vorliegt, kann man die Flächen der Einzelwürfel verschieden färben. Die Flächen werden durch sechs Farben gekennzeichnet. Innenflächen erhalten noch eine Zusatzkennzeichnung. Fig. 1 zeigt eine geschickte Art der Notation.

2.2 Möglichst wenige Klebungen ("Scharniere")
Will man acht Würfel verbinden, so braucht man mindestens sieben Scharniere. Auf diese Weise entsteht eine "Schlange". Die erwähnten Vorbilder waren allerdings keine solche Schlangen, sondern "Ringe", denn dort waren bei der Schlange der erste Würfel noch mit dem letzten verbunden. Ringe brauchen also mindestens acht Scharniere.

2.3 Wann sind zwei Realisierungen voneinander verschieden?
Wenn man nach einigen Bewegungen wieder die Ausgangslage erhalten hat, dann ist der Würfel natürlich wieder gleich gefärbt wie vorher. Eine neue Realisierung liegt dagegen vor, wenn wenigstens auf einer kleinen Teilfläche des großen Würfels die Farbe geändert ist.
Die Farben der End-Anordnung sollen als Kennzeichen der Realisierung dienen, denn sie sind leichter erkennbar und nach Art der Fig. 1 leichter darstellbar als die Anordnung der Scharniere.
Man könnte auch die Art der Bewegung von der Ausgangs- in die Endlage als Kennzeichen verwenden, doch ist der Gesamtablauf in den meisten Fällen zu unübersichtlich, um ihn einfach und eindeutig zu notieren. Ferner sind durchaus verschiedene Bewegungsabläufe möglich, um von einer bestimmten Ausgangslage zu einer bestimmten Endlage zu kommen. Der Bewegungsablauf kennzeichnet also nicht umkehrbar eindeutig die Koppelung von Anfangs- und Endlage.

3. Möglichkeiten für "Würfelschlange" und "Würfelring"

3.1 Würfelschlangen
Um darzustellen, welche der Würfel miteinander verkettet sind, kann man sich zuerst einmal einen Streckenzug von Würfelmittelpunkt zu Würfelmittelpunkt gezeichnet denken.

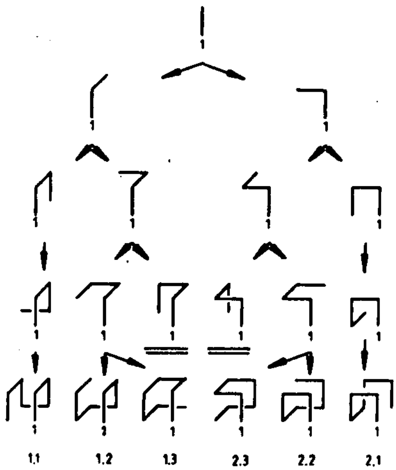


Fig. 2

Fig. 2 zeigt, wie man Würfel aneinandersetzen kann. Wenn man erkennt, daß man nicht mehr zu einem großen Würfel kommen kann, wird abgebrochen. Man kommt so zu sechs verschiedenen Schlangen, die aber nicht alle geometrisch verschieden sind. Läßt man Bewegungen der (starren) Schlange zu, so erkennt man, daß die Schlangen 1.1 und 2.1 identisch sind. Die anderen Schlangen bilden zwei Paare von ebenensymmetrischen Anordnungen, nämlich 1.2 und 2.2 bzw. 1.3 und 2.3.
Die Schlangen 1.2 und 2.2 lassen sich nicht zu einem Ring verbinden. Will man Ringe betrachten, so muß man also die Schlangen 1.1, 1.3 und 2.3 weiter untersuchen. Diese Überlegungen können Schüler der Sekundarstufe I durchaus selbständig an Modellen anstellen. Schwierigkeiten bereiten allenfalls eine schriftliche oder grafische Notation.
Will man das alles rein theoretisch oder allein mit Zeichnungen überlegen, wird man, auch wenn man über ein gutes Raumvorstellungsvermögen verfügt, rasch an Grenzen stoßen. Nicht nur Schülern hilft hier die Arbeit mit Modellen.

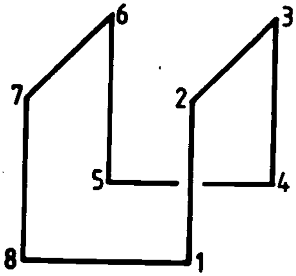


Fig. 3

3.2 Würfelringe

Fig. 3 zeigt, daß es, wenn man nur die Folge der Einzelwürfel betrachtet, nur genau einen Ring gibt. Damit ist die Reihenfolge der Einzelwürfel im Ring festgelegt. Nun muß (nur?) noch entschieden werden, wie die Scharniere die jeweiligen Nachbarwürfel miteinander verbinden.

4. "Ebene" Zwischenlagen als Denkhilfe

4.1 Der "Zweischichten-Ansatz"

Wenn man vom Ring aus Fig. 3 ausgeht, so kann man die Würfelanordnung im Aufriß wie in Fig. 4a darstellen. An jedem Scharnier ist eine 180°-Drehung möglich. Am Modell sollte man (Haltbarkeit!) stets beide Klebungen ausführen. Scharniere, die oben oder in der oberen Schicht mit vertikaler Drehachse angebracht sind, werden voll gezeichnet. Bei solchen, die unsichtbar sind oder die in der unteren Schicht vertikal liegen, werden nur die Umrisse angedeutet.

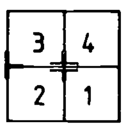


Fig. 4a

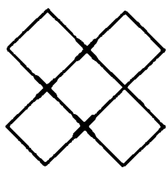


Fig. 4b

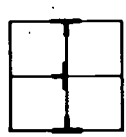
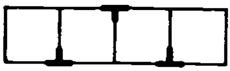


Fig. 4c

Offensichtlich erhält man vom Würfel aus Fig. 4a über die Zwischenlage (Fig. 4b) die Endlage (Fig. 4c). Entscheidend ist, daß für die angegebene ***Bewegung***, unabhängig von den zusätzlichen Scharnieren, genau eine Endlage entsteht.

Fig. 4a repräsentiert die beiden Möglichkeiten, in Fig. 3 eine horizontale "Achse" einzufügen. So ergeben sich keine anderen Bewegungen. Fig. 4a zeigt auch, daß man mit Hilfe einer anderen Bewegung in eine (Zwischen-)Lage kommt (vgl. Fig. 5a), die man als "Einschichten-Ansatz" bezeichnen kann. Klappt man die Anordnung aus Fig. 5a um 90° erhält man Fig. 5b. Im Rahmen des "Zweischichten-Ansatzes" ist dies die ***Anordnung Z1***.



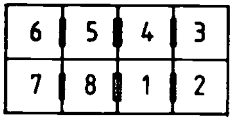


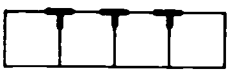
Fig. 5a *Fig. 5b*

Nun soll überlegt werden, welche zusätzlichen Scharniere bei der Anordnung Z1 zwischen den Würfeln 2 und 3 bzw. 6 und 7 denkbar sind. Da es für jede Verbindung vier Kanten für die Scharniere gibt, repräsentiert Z1 4*4 Klebungen, die nicht geometrisch voneinander verschieden sind. Mit selbsterklärender Symbolik (o-o für oben-oben usw.) sind dies die Lösungen:

o-o,	o-u=u-o,	o-l=l-o,	o-r=r-o,
*	u-u,	u-l=l-u,	u-r=r-u,
*	*	l-l,	l-r=r-l,
*	*	*	r-r.

Unterschiedliche Anordnung der Scharniere bei 2-3 und 6-7 verhindert weitere Klappungen zu einem Würfel. Es genügt daher, o-o, u-u, l-l und r-r zu betrachten.

Wenn man die Einschicht-Lage aus Fig. 5 betrachtet, erkennt man, daß es auch die ***Anordnung Z2*** (Fig. 6) der Scharniere gibt. Sie läßt ebenfalls eine Zweischichten-Bewegung (Fig. 7) zu, repräsentiert also 4*4 = 16 Scharnier-Anordnungen, aber nur eine Farb-Lösung. Die jeweils unterschiedlichen Anordnungen führen nämlich auf sonst starre "Rechtecke".



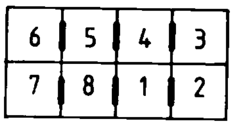
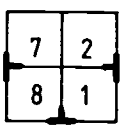
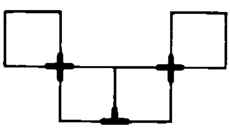


Fig. 6a *Fig. 6b*





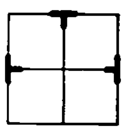


Fig. 7a *Fig. 7b* *Fig. 7c*

Betrachtet man den Würfel-Ring aus Fig. 3 und den Bewegungsblauf aus Fig. 4 für die Anordnung Z1, so erkennt man, daß der Würfelring einen analogen Bewegungsablauf auch noch in einer ***Anordnung Z3*** (Fig. 8) erlauben würde.

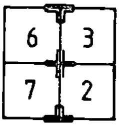


Fig. 8a

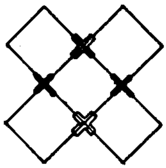


Fig. 8b

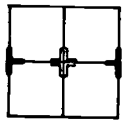


Fig. 8c

Die Anordnung in Fig. 8a und die darauffolgenden Bewegungen entsprechen einer in Fig. 3 eingefügten vertikalen Achse.
Hier kann man die noch nicht festgelegten Scharniere zwischen den Würfeln 1-2, 3-4, 5-6 und 7-8 auf 4*4*4*4 Arten (nicht alle verschieden) anbringen, doch gibt es ***zunächst*** nur diesen Bewegungsablauf und nur diese Farbanordnung.
Da die Ansätze Z1 und Z2 als Zwischenlage auch eine Schicht zulieβen und da es auch für einige der Z3-Anordnungen eine einschichtige Zwischenlage (vgl. Fig. 9) gibt, wird diese "ebene" Lage als Ausgangslage gewählt. Dieser Ansatz ist wesentlich leichter systematisch zu behandeln.
"Systematische Behandlung" bedeutet dabei nicht nur Notation, sondern auch Durchführung von Experimenten mit Modellen. Ohne diese Tätigkeit sind (nicht nur) Schüler mit diesen Fragen überfordert!

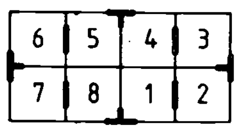
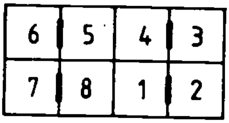


Fig. 9

<u>4.2</u> Der "Einschichten-Ansatz"

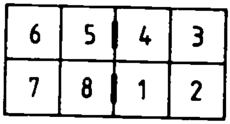
Um vom Ausgangswürfel in eine Einschicht-Lage zu kommen, kann man (anschaulich) zwei "Flügel" herunterklappen oder den Würfel "öffnen". Die Ergebnisse zeigt Fig. 10.
Selbstverständlich kann die Scharnier-Anordnung auch so sein, daß beide Grundbewegungen ausführbar sind. Solange man dies aber nicht weiß (es ist nicht so), muß man beide

Ansätze getrennt untersuchen. Wir werden von der *Anordnung E1* (Fig. 10a) und der *Anordnung E2* (Fig. 10b) sprechen.



E1

Fig. 10a



E2

Fig. 10b

<u>4.3</u> Die "ebene" Grundanordnung E1

Mit der Angabe "E1" ist die Lage der Scharnieren 1-2, 3-4, 5-6 und 7-8 festgelegt. Man betrachtet nun 4-5 und 8-1. Bei unterschiedlicher Anordnung dieser Verbindungen gibt es keine gemeinsame Klappung, die zu einem Würfel führt. Daher genügt zur Festlegung dieser Scharniere eine Angabe (o, u, a, i). Man untersucht also E1,oo, E1,uu, E1,aa und E1,ii. Entsprechend können die Scharniere 2-3 und 6-7 nur gleichartig angebracht sein, denn sonst gibt es keine Klappung zu einem Würfel. Wir kommen in 6. auf diesen Ansatz zurück.

Man kommt demnach insgesamt zu folgenden Fällen:

E1,oo ist eine Z1-Anordnung, also als Lösung bekannt.
E1,uu ist eine Z2-Anordnung, also als Lösung bekannt.
E1,aa,aa ist eine Z3-Anordnung, also als Lösung bekannt.
E1,aa,ii nur in einer Schicht möglich. Kein Würfel.
E1,aa,oo ist Lösung (2 Lagen) und auch eine E2-Anordnung.
E1,aa,uu ist Lösung (2 Lagen) und auch eine E2-Anordnung.
E1,ii,aa ist Lösung (4 Lagen!), aber keine E2-Anordnung
E1,ii,ii ist Z3-Anordnung, also bereits als Lösung bekannt.
E1,ii,oo ist Lösung (2 Lagen) und auch eine E2-Anordnung.
E1,ii,uu ist Lösung (4 Lagen!) und auch eine E2-Anordnung.

E1,ii,aa zeigt, daß man auch E1 untersuchen muß, E2 genügt nicht. Auf E1,ii,uu werden wir in 6. zurückkommen.

E1,ii,au (entspricht E1,ii,ua) soll (Fig. 11) als Beispiel einer gemischten Scharnier-Anordnung betrachtet werden.

Auch hier wird der Versuch, den Würfelring nur in Gedanken zu bewegen, keinen Erfolg haben. Je nach Raumvorstellungsvermögen sind Schüler in der Lage einen bis drei, selten mehr, Schritte vorauszudenken.

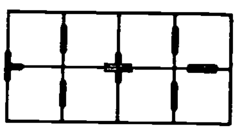


Fig. 11

Es kann keine Scharnier-Klappungen geben, die zu einem Würfel führen. Es gibt aber, was man (fast?) nur am Modell merkt, räumliche Drehungen. Vgl. dazu in 6.

4.4 Die ebene Grundanordnung E2

Die Anordnung E2 legt nur die Scharniere 4-5 und 8-1 fest (Fig. 10b). Wählt man nun 1-2, 3-4, 5-6 und 7-8 alle o (u), dann liegt eine E1-Anordnung vor. Diese Fälle sind bereits diskutiert. Wählt man 1-2, 3-4, 5-6 und 7-8 alle a und 3-2 sowie 6-7 je o (u), erhält man nach einer Klappung um 2-3 und 6-7 wieder die Anordnungen E1,ii,uu bzw. E1,aa,uu. Wählt man 1-2, 3-4, 5-6 und 7-8 alle i und 2-3 sowie 6-7 je o (u), kommt man zu den Anordnungen E1,ii,oo bzw. E1,aa,oo. Spätestens jetzt sucht man eine E2-Anordnungen, die nicht E1-Anordnungen ist. Als Beispiel dient die Scharnieranordnung 1-2: o, 3-4: i, 5-6: i, 7-8: o, 2-3: o, 6-7: o.

Man kann nun leicht in Gedanken (leichter: am Modell) die hintere Würfelreihe (3,4,5,6) um 90° nach oben klappen. Dann hat man bei 1-2 und 3-4 bzw. 7-8 und 5-6 je eine gemeinsame Drehachse. Die Würfel sperren aber gegenseitig.

Die Vielfalt der Möglichkeiten erschwert hier die Entscheidung. Wesentlich ist, daß zuerst in die ebene Zwischenlage "geöffnet" werden muß. Man erkennt nach vielen Versuchen, daß es dann (wohl!!!) keine Klappung zu einem anderen Würfel gibt, wenn nicht zugleich eine E1-Anordnung vorliegt. Eventuell kann man also auf die Untersuchung von E2 verzichten, wenn man nur Klappungen betrachtet.

5. Lösungen ohne "ebene" Zwischenlage

Wenn es keine einschichtige Zwischenlage geben soll, so kann man, ausgehend von einer E1-Scharnier-Anordnung, der Fig. 12 entsprechend annehmen, man müsse diese Zwischenlage durch Klappungen weiter in eine andere Lage bringen.

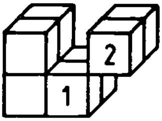


Fig. 12a

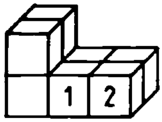


Fig. 12b

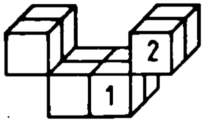


Fig. 12c

Ausgehend von der Lage in Fig. 12a erkennt man sofort, daß es keine vertikale Klapp-Achse geben kann. Eine Achse von links nach rechts könnte 2-3 und 6-7 je o bzw. je u verbinden. Je u ergibt eine starre Anordnung. Für je o führt keine der vier gleichartigen Verbindungen von 1-8 und 4-5 auf eine Würfel-Klappung. Nicht gleichartige Verbindungen führen auf kaum bewegliche Anordnungen. Insgesamt findet man keine weitere Würfel-Lage. Eine Achse von vorne nach hinten könnte 4-5 und 8-1 je u oder je o verbinden. Nimmt man je o an, so erhält man keinen Würfel, je u dagegen führt auf E1,uu, eine bereits bekannte Z2-Anordnung.
Ausgehend von der Anordnung in Fig. 12b erkennt man, daß es keine von links nach rechts und keine von oben nach unten verlaufende Achse gibt. Sucht man Achsen von vorne nach hinten, so könnte 4-5 und 8-1 je o bzw. je u verbunden sein. Je o führt auf keinen Würfel, je u kann zu einem Würfel führen, wenn 5-6 und 7-8 je a verbunden sind. Dies ist aber eine Anordnung, die E1 zuläßt, ist also bereits untersucht. Insgesamt ergibt sich, daß die Anordnung 12b keine nicht "ebene" Umformung zu einem anderen Würfel zuläßt.
Entsprechend untersucht man für die Scharnier-Anordnung aus Fig. 12c. Man wählt dazu 1-2 und 6-7 je oben. Schüler können diese Antworten an Modellen selbständig erarbeiten.
Auch von der E2-Anordnung ausgehend kann man durch eine 90°-Öffnung eine Lage erreichen, von der aus man nach anderen, nicht über die ebene Lage führenden Klappungen zu einer von der Ausgangslage verschiedenen Würfelanordnung sucht. Auch hier findet man keine solche Klappung.

6. Rollbewegungen

6.1 Weitere Bewegungen suchen

Der Bewegungsablauf der Anordnung E1,ii,uu besteht aus der Folge "klappen", "wenden", "schließen" (zu "öffnen" invers) und zyklisch weiter. Wenn man dagegen das "klappen" nur um 90° durchführt, kommt man in die in Fig. 13a dargestellte Lage. Nun gibt es zwei Klappungen um 90° und anschließend je eine räumliche Bewegung ("rollen"), die zu anderen Endlagen führt. In der in Fig. 13b gezeichneten Grenzlage ge-

hen die beiden Bewegungsarten ineinander über.

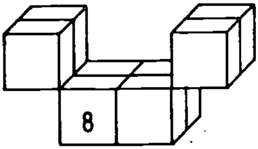


Fig. 13a

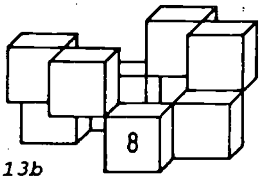


Fig. 13b

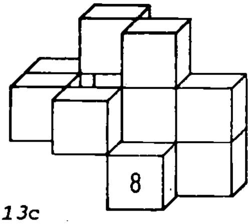


Fig. 13c

Dieses Rollen entzieht sich der (elementaren) mathematischen Beschreibung. Es fehlt sogar der Nachweis, daß es mathematisch exakt möglich ist. Das bei allen Modellen vorkommende "Spiel" könnte den Ablauf möglich machen, eine auf der symbolischen Ebene zu führender Beweis fehlt. Schüler erkennen so die Notwendigkeit mathematischer Beweise.
Entsprechend führt die Kontrolle der von einer E2-Anordnung ausgehenden Rollbewegungen zu keinem schlüssiges Ergebnis.

6.2 Die Frage des Kalküls

Gerade bei 5. war es deutlich, daß wir in Koordinatenrichtungen überlegten. Die Rollungen aus 6.1 zeigen, daß es Bewegungen gibt, die sich diesem Ansatz entziehen. E1,ii,au (mit drei Würfel-Lagen) ist Beispiel für eine Anordnung, die nur "Rollungen" zuläßt. Da ein einfaches (ebenes) Kalkül fehlt, muß die Antwort auf die Frage nach der Zahl von insgesamt möglichen Scharnieranordnungen, die zu (mindestens) zwei Würfeln führen, offen bleiben.

Literatur

[1] JENKINS, G. / WILD, A.: Mathematical Curiosities 1 Tarquin Publications, Stardbroke, UK, S. 21 ff.

[2] DEGNER, R. / KÜHL, J.: Würfelkabinett Heft zur 79. MNU-Hauptversammlung, Kiel 1988

[3] MÜLLER, K.P.: Ebene Geometrie ist das Kalkül, um Raumgeometrie zu bewältigen. Wird erscheinen in: Beiträge zum Mathematikunterricht 1989, Franzbecker, Bad Salzdetfurth 1989

Michael Neubrand (Dortmund, FRG)

Mathematical Activities with the Theorem of the Inscribed Angles

Abstract

The theorem of the inscribed angles is used as an example of how one can convey with a certain content also some ideas about mathematical working in general. For this purpose some mathematical activities are collected and three phases distinguished: experiments, proofs and applications.

Dealing with a mathematical theorem in the class cannot be restricted to the mere transportation of a certain content. Always the teacher also conveys opinions and attitudes towards mathematics. So, one can ask the question, if one should take the opportunity and try to use the theorem under consideration to draw reasonable explicitly an adequate picture of mathematical working (see also Neubrand [3], [4] for further explanation and more examples of this leading idea). This is what is shown here with the inscribed-angles-theorem as an example.

In order to reach this goal, one should at first realize that every mathematical theorem is connected with many other topics in mathematics or in various fields of applications. Doing mathematics is then, generally spoken, the activity of gaining orientation in a dense network of many mutually connected observations, statements, facts etc.. The learner, however, can only then grasp this picture of mathematical working, if she or he is confronted with several observations leading to the problem of the theorem, with several proofs, with more than one application. Consequently, the teacher has to be aware of a variety of such possibilities. In the following, we collect and evaluate these possibilities by distinguishing three typical phases in dealing with a mathematical theorem. One should however add that in concrete classroom use these phases are not necessarily also the phases of the instruction.

1. Phase: Experiments, Observations, Problems

a) The most natural experiment for the theorem of the inscribed angles is, to draw a circle, to select a segment AB and to measure the angles AXB from various points X of the circleline.

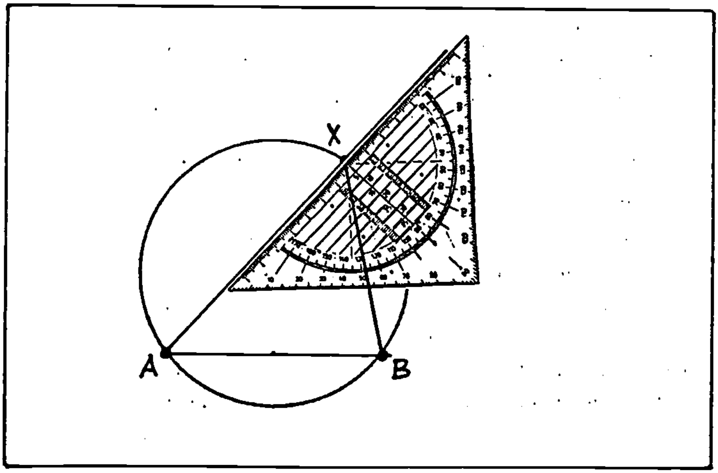


Fig. 1

Although this activity seems to be most natural, one should remark that every element of the theorem is already given in this exercise.

b) Another experiment, more open to raise questions, is to move a model of an angle made of cardboard along the two points A and B, and to observe the locus of the vertex of the angle.

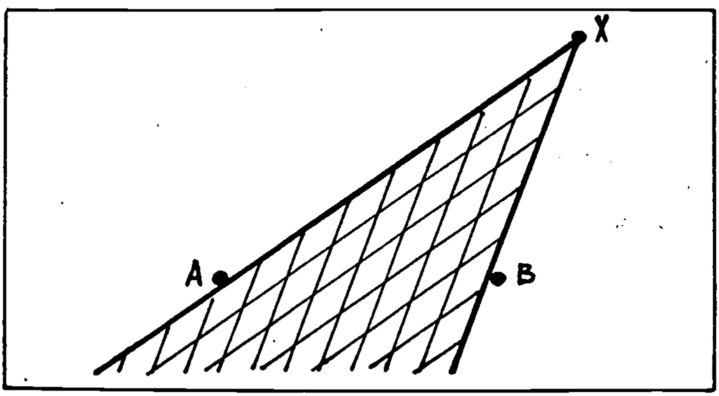


Fig. 2

We will come back to this approach at the end of this article.

c) A more realistic problem is, to ask how the angles under which a segment, e.g. a building of which one wishes to get a photo, vary if one moves on several paths from this segment.

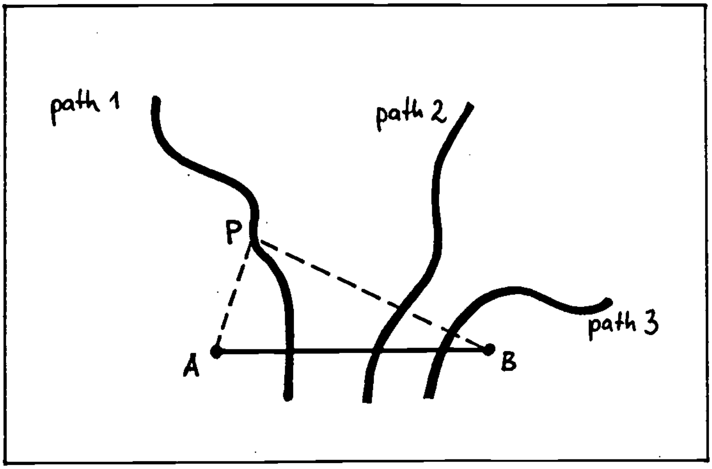


Fig. 3

It is then natural to ask where the places with constant angles are situated.

d) The latter problem may also be dealt with an appropriate computer program. Using the program written by B. Schuppar [5], the pupils or the teacher can move a point on the screen with the help of the mouse. The computer draws automatically the segments to the prefixed points A and B and notes the sizes of the angles. So, one easily can find a lot of points X with e.g. $\angle AXB = 65°$, see Figur 4:

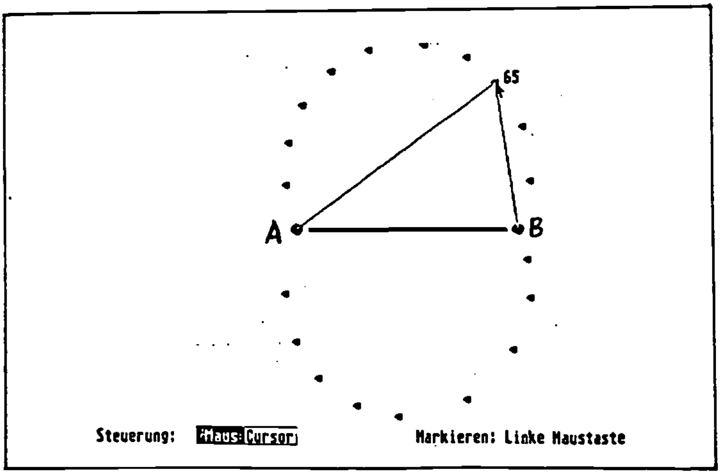


Fig. 4

With respect to our introduction, the most important point of this experiment is that the inscribed-angle-theorem now appears within a very substantial context. The circle is a special case of a "locus", as also e.g. the ellipse is (the sum of the distances is kept constant).

2. Phase: Arguments, Proofs

There are many different ideas which lead to a proof of the inscribed-angles-theorem, and again it is most important to point just on the differentness of these proofs and of the context in which they stay. I only sketch three of them.

a) Having opened the context of quadrilaterals in the classroom and derived the characteristic of the inscribed quadrilateral that opposite angles supplement to 180°, a very immediate proof follows:

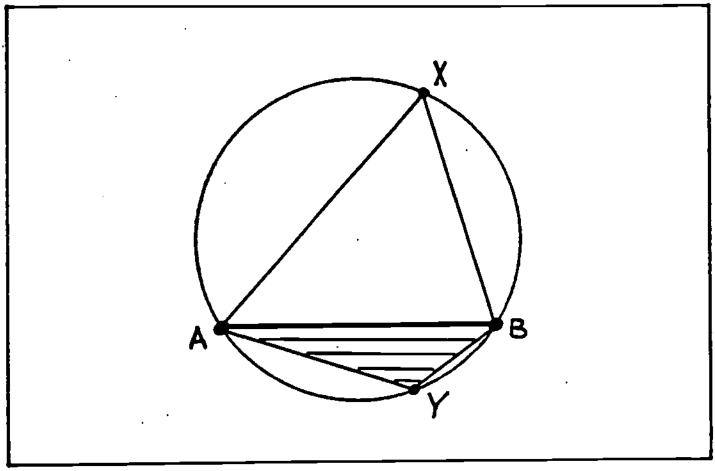


Fig. 5

The angle at X must keep the same value while X is moved along the circle, because it always supplements to the angle at Y remaining fixed during this procedure.

b) An entirely different proof is used in transformation geometry.

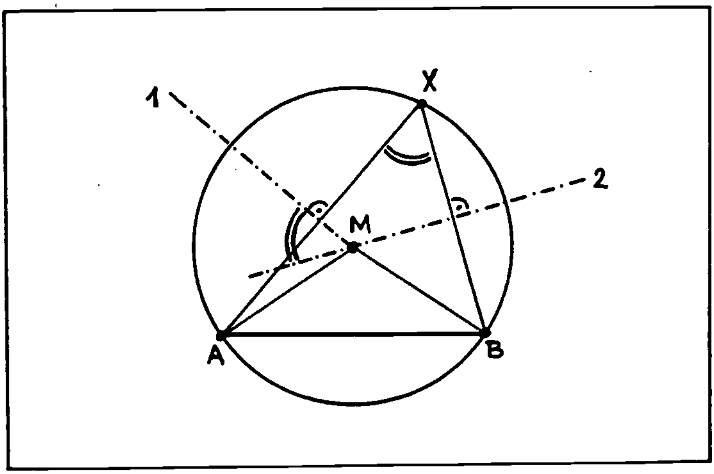


Fig. 6

Since A is mapped to B by the two reflections on the axes 1 and 2, and since these two reflections result in a turn around M, the angle between the axes 1 and 2 must be half of the angle AMB. Hence, the angle between 1 and 2 is constant, and so is the angle at X.

This is not a proof which opens an intuitively rich context for the theorem. The sense of this proof consists only in being consequent with the program of transformation geometry, a choice made by the teacher not by the learner. (Transformation arguments, however, are valuable if the figure under consideration already contains some symmetries.)

c) Again, a further context is used in this proof by W. KROLL [2], stressing the idea of local movement:

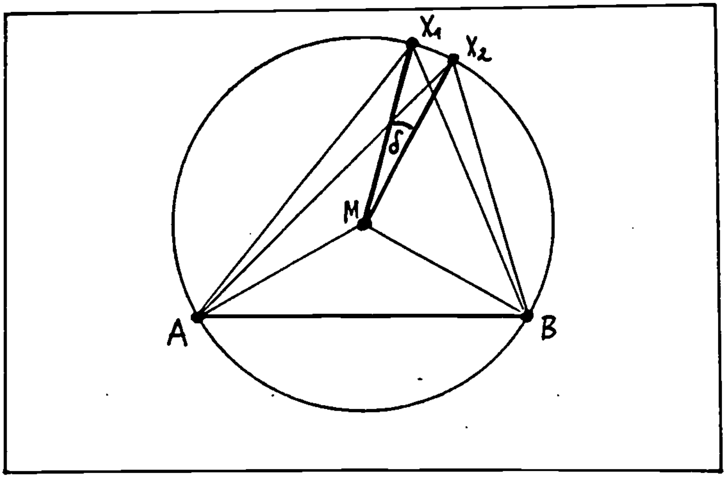


Fig. 7

If X_1 is moved to X_2 along the circle, then the angle at the vertex of the isoscele triangle AMX_1 increases in δ , that of the triangle AMX_2 decreases in δ. Hence, the basis angle at X_1 increases/decreases in $\delta/2$. But in the sum these effects cancel out, whence the angles at X_1 and X_2 remain unchanged.

3. Phase: Exercises, Applications

One should distinguish two functions of this phase. The first is to foster the understanding the theorem as such, by recognizing it from various points of view. the second is to show how the theorem is used as a unit in itself to create further geometrical contexts.

a) As a working sheet to practice the inscribed-circle-theorem in a non-drill way open for continuing explorations by the pupils one may use in the class the following figure:

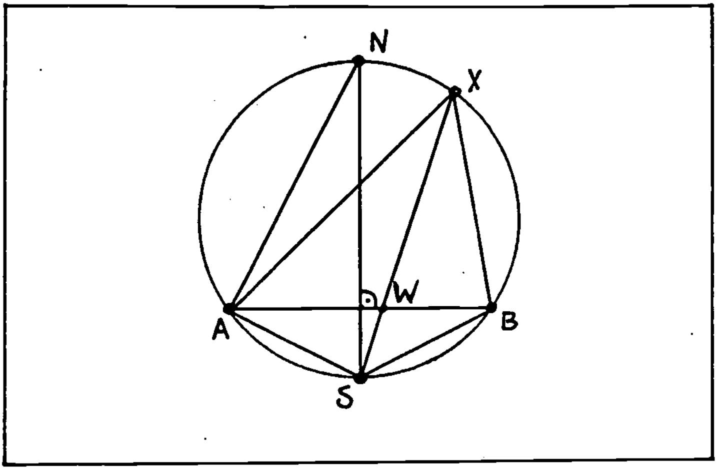


Fig. 8

The angle at X may have the size α. Answer the following questions:

- How often may you find the angle $\alpha/2$ in this figure? Where? Why?
- Where is the center of the circle from which the segment AB appears under the angle $\alpha/2$?
- Why are the triangles ASW and BXW similar?

b) As a "real-world" application one may use the following picture:

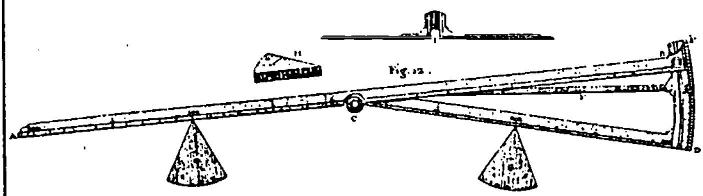


Abb. 32: *Bewegliches Winkelmaß zum Zeichnen von Kreisbögen* (Adams Tafel X Fig. 12)

aus [1]

Fig. 9

It is an advertising picture of 1795 of the London instrument maker G. Adams (cf. [1]). It shows a device with which one can draw a big circle-arc given by three points, whose center is too far apart to use an ordinary compass. With the inscribed-angles-theorem this device is almost self-explanatory (cf. also Fig. 2).

Literature

[1] G. ADAMS: Geometrische und graphische Versuche. (ausgewählt, bearbeitet und erläutert von P. DAMEROW und W. LEFEVRE). Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1985.

[2] W. KROLL: Bewegliche Figuren. Math. Lehren 14, 11 - 12 (1986)

[3] M. NEUBRAND: Das Haus der Vierecke - Aspekte beim Finden mathematischer Begriffe. J. Math.-Didakt. 2, 37 - 50 (1981)

[4] M. NEUBRAND: Aspekte und Beispiele zum Prozeßcharakter der Mathematik. Beitr. Math.-Unterricht 1986, p. 25 - 32

[5] B. SCHUPPAR: Ortslinien - Operative Erforschung der Ebene mittels eines interaktiven Graphikprogramms. In: K. D. GRAF (Hrsg.): Computer in der Schule, 2. Stuttgart: Teubner, 1988. p. 5 - 24

Erkki Pehkonen (Helsinki, Finnland)

Verwenden der geometrischen Problemfelder

Zusammenfassung

Die Aufgabe der Pflichtschule besteht darin, die Schüler möglichst vielseitig auf das Leben vorzubereiten. Im Mathematikunterricht soll man vor allem versuchen, die allgemeinen Vorstellungen der Schüler über die Mathematik und ihr Erlernen zu ändern. Die kognitive Lerntheorie (der Konstruktivismus) betont den eigenen Ansatz des Schülers im Lernprozess.

Als Realisierung der erwünschten Änderungen im Mathematikunterricht sind allgemein die Methoden des offenen Unterrichts angeboten worden. Im Mathematikunterricht bedeutet dies, u.a. Problemfelder zu verwenden. (Eine Menge von zusammengehörenden Problemen nennt man ein *Problemfeld.*) Es wird über Erfahrungen mit den mathematischen Problemfeldern in den heterogenen Klassen der finnischen Sekundarstufe I diskutiert.

Die Aufgabe der Pflichtschule besteht darin, die Schüler möglichst vielseitig auf das Leben vorzubereiten. Deshalb sollte man den Mathematikunterricht so entwickeln, dass erlerntes Wissen und Können dem Schüler brauchbar sind. Bis heute hat man die Mathematik als Wert an sich unterrichtet, d.h. Mathematik um der Mathematik willen. (Martin 1986, 13) Jetzt sind jedoch einige Änderungen in der Auffassung über den Mathematikunterricht zu beobachten.

1. Das neue Bild der Schulmathematik

Schon lange hat man gedacht, dass die früher allgemeine rigide Auffassung über die Mathematik (es gibt ein "von oben gegebenes" System) und ihren Unterricht (es wird in kleinen "Stückchen" vom Katheder aus gegeben) nicht mehr brauchbar ist. Solche Unterrichtsmethode ist mit dem Wort "Elementarisierung" skizziert worden (z.B. Zimmermann 1981), und sie

scheint, sich auf den Skinnerschen Behaviorismus zu begründen. Für sie ist es typisch, dass die Information in kleine Stücke zerlegt worden ist, die der Lehrer dann in passender Menge auf einmal den Schülern darbieten wird.

Im Mathematikunterricht soll man vor allem versuchen, die allgemeinen Vorstellungen der Schüler über die Mathematik und ihr Erlernen zu ändern. Zum Ziel könnte man sich setzen, dass die Majorität der Schüler Mathematik als nützliches Hilfsmittel betrachtet und die in der Mathematik erlernten Problemlösetechniken anwendet (Damerow 1984, 82). International ist es deutlich geworden, dass im Mathematikunterricht der Pflichtschule den Schüleraktivitäten mehr Gewicht gegeben werden soll (siehe z.B. Cockcroft 1982, Spiegel 1982, Walsch 1985, Wittmann 1988, Anon. 1988, NCTM 1989).

Eine weitere Auffassung. In England hat diese Entwicklung schon früher angefangen. Es scheint, dass man Mathematik dort in einem viel weiteren Sinn als auf dem Kontinent (u.a. in der Bundesrepublik) versteht. Zum Beispiel definieren Bell & al (1978) Mathematik als natürliche Art und Weise, unsere Erfahrungen von der Welt zu organisieren, die bei Begegnen von Regelmässigkeiten gebraucht wird (ibid 2). Eine ähnliche Beschreibung der Mathematik findet sich auch im neuen englischen Lehrplanvorschlag (Anon. 1988, 3).

Der Engländer Chris Ormell (1983, 24) unterscheidet beim Verwenden der Mathematik insgesamt 12 verschiedene Ebenen - aus den alltäglichen Kontrollsituationen bis zur Meta-Mathematik:

Ebene 12: Meta-Mathematik
Ebene 11: moderne reine Mathematik
Ebene 10: moderne anwendbare (diskrete) Mathematik
Ebene 9: traditionelle anwendbare (kontinuierliche) Mathematik
Ebene 8: wissenschaftliche Theoretisierung
Ebene 7: wissenschaftliche Forschung
Ebene 6: technologisches Design
Ebene 5: technisches Design und Entwickeln
Ebene 4: Planen und Entwickeln der Unternehmen
Ebene 3: Entwerfen für Anfertigen der Gegenstände
Ebene 2: Entwerfen für Unternehmen der Angelegenheiten
Ebene 1: Kontrollieren im Alltagsleben

Die in den mathematischen Instituten erlernten Mathematik befindet sich traditionell auf den Ebenen 9-11, was der Schulunterricht im allgemeinen gefolgt hat. Schon in der Schulmathematik sollte man aber auch die niedrigeren Ebenen der Mathematik (aus den alltäglichen Kontrollsituationen anfängend) mithoben.

Solches hat man schon seit vielen Jahren in England in verschiedenen Projekten probiert. Die Ergebnisse dieser Experimente hat man zum Lehrplansentwurf konzipiert, wo einer der drei Inhaltskomponente Praktische Anwendungen der Mathematik heisst (Anon. 1988, 49-53).

Das neue Mathematik-Bild. Jetzt scheint sich das Bild von der Mathematik und ihrem Unterricht allmählich zu wandeln. Für das neue Mathematik-Bild ist u.a. folgendes typisch:

- Betonung von mathematischem Inhalt anstelle eines mathematischen Formalismus;
- mathematische Denkprozesse sind mindestens ebenso wichtig wie mathematische Ergebnisse;
- bei der mathematischen Präzision und Genauigkeit soll das Entwicklungsniveau der Schüler berücksichtigt werden;
- auch der spielerische und ästhetische Aspekt der Mathematik wird betont;
- anstelle von linearem Denken soll flexibles und vernetztes Denken gefördert werden;
- der Bedeutungsaspekt der mathematischen Fachsprache ist wichtiger als der symbolische Aspekt (Pehkonen & Zimmermann 1989).

Die Ursprünge dieses Mathematik-Bildes sind u.a. bei Lakatos (1977) und Davis & Hersh (1985) zu finden sind.

2. Die aktive Lernauffassung im Mathematikunterricht

Den theoretischen Hintergrund für die erwähnte Entwicklung bildet die kognitive Lernauffassung. Diese begründet sich auf den Konstruk-

tivismus, den viele Forscher als Hintergrundtheorie haben. Den Konstruktivismus kann man folgend beschreiben (vgl. Schoenfeld 1987; siehe auch Leino 1989): Der Ausgangspunkt in der kognitiven Lernpsychologie ist die Auffassung, dass der Lernende beim Schaffen neuer Kenntnisse wenigstens teilweise sie erneut konstruiert. Also wird der Lernende nicht nur neue Information in seinem Wissensvorrat zufügen, sondern er baut (und er soll auch bauen) beim verstehenden Lernen die Verbindungen zwischen neuer Information und seiner früheren Wissensstruktur. Dieses Bauprozess neuer Verbindungen ist wesentlich für das Erlernen.

Die aktive Lernauffassung. Die kognitive Psychologie betont den eigenen Ansatz des Schülers beim Lernprozess. Demnach entsteht qualitativ erfolgreiches oder tiefgezieltes Lernen (Marton & al 1977) nur dann, wenn sich der Lernende selbst aktiv mit der neuen Sache befasst (vgl. auch Wittmann 1981, 71). Deshalb soll man nach der heutigen Lernauffassung die Eigenaktivität des Schülers betonen.

Diese auf dem Konstruktivismus sich begründende Lernauffassung nennt man eine *aktive Lernauffassung* (z.B. Hirsjärvi & Remes 1988, 129) als Kontraposition zur behaviorischen Lernauffassung. Gemäss der aktiven Lernauffassung versteht man das Erlernen als Prozess - als eine Serie der geistigen Handlungen. Das Erlernen passiert eben in der aktiven Handlung des Schülers; beim Erlernen baut er sein Bild über die Realität. Die neuen Informationen werden, wenn er sie interpritiert hat, in sein existierendes Denksystem geschmolzen, und es wird durch sie geändert. Unter dem Lernprozess gliedern die Informationen sich zu einem hierarchischen System, und ihre Kerninhalte werden in die Wissensstruktur des Schülers zugebaut.

Die Bedeutung der Kommunikation. Traditionell wird es gedacht, dass die Sprache und die Mathematik nicht so viele Verbindungen haben und dass die Mathematik ihre eigene Sprache für ihre Zwecke schafft. In den letzten Zeiten hat man aber viel Acht auch für die Bedeutung der Sprache im Mathematiklernen und -lehren gelegt (z.B. Cockcroft 1982, Anon. 1987, Brissenden 1988, Maier 1989). U.a. ein der zentralen Themen im Cockcroft-

Bericht ist die Sprache und die Kommunikation. Im Bericht wird es betont verlangt, "Diskussion zwischen dem Lehrer und den Schülern sowie zwischen den Schülern" in den Mathematikunterricht auf allen Stufen einzusetzen (Cockcroft 1982, 71).

Im Mathematikunterricht wird die Einzelarbeit mit Aufgaben sehr oft betont. Damit man vielseitige Diskussion (auch zwischen den Schülern) in Mathematikstunden mithaben könnte, sollte die traditionellen Unterrichtsmethoden entwickelt werden. Falls man im Unterricht Diskussion hat, ist die Interaktion gewöhnlicherweise folgend: *Lehrerfrage -> Schülerantworten -> Lehrerbewertung zur Schülerantworten.*

Falls der Lehrer die Interaktion in der Klasse verbessern will, soll er im Unterricht eine neue Rolle nehmen: Der Lehrer soll als Diskussionsleiter (und vielleicht auch als Provokateur zur Diskussion) tätig sein und den Schülern die Möglichkeit geben, die Sachen zueinander zu erklären. Ein Interaktionsmodell, in dem auch Diskussion zwischen Schülern betont wird, könnte folgend aussehen (Abb. 1):

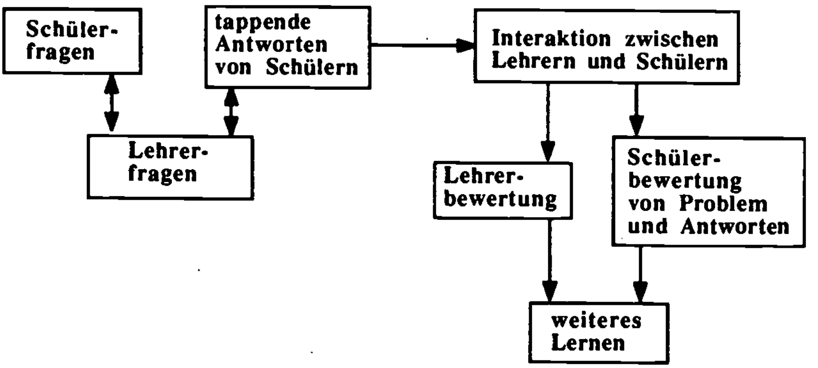


Abb. 1. Das neue Unterrichtsmodell, in dem Schülergesprech betont wird (Anon. 1987, 8).

3. Problemfelder: Was sind sie?

Als Realisierung der oben erwähnten Änderung sind allgemein die Methoden des offenen Unterrichts angeboten worden. Im Mathematikunterricht bedeutet dies u.a., dass man offene Aufgaben mit einbezieht (vgl. Pehkonen & Zimmermann 1989). Wenn der Anfangs- und/oder Zielzustand nicht genau vorgegeben sind, nennt man eine Aufgabe *offen*. Es ist zu bemerken, dass offene Aufgaben neben offenen Problemen auch andere Schüleraktivitäten als das Basteln eines Körpermodells usw. enthalten.

Was ist dann ein Problem? Als *Problem* wird eine solche Aufgabensituation bezeichnet, für deren Lösung der Schüler die (ihm) bekannte Information auf eine (für ihn) neue Weise kombinieren muss (siehe z.B. Kantowski 1980). Falls er sofort die Regeln erkennen kann, die zum Ausführen der Aufgabe benötigt werden, ist die Aufgabe für ihn eine Standardaufgabe (oder Routinenaufgabe). Falls man nicht unterscheiden will, ob eine Standardaufgabe oder ein Problem in Frage ist, spricht man kurz über eine Aufgabe.

Oft betrachtet man eine Menge von zusammengehörenden Problemen; eine solche Menge von Problemen nennt man ein *Problemfeld*. Aus einem Problem kann man ein Problemfeld entwickeln, wenn man die Bedingungen des Problems etwas ändert. Z.B. kann man aus einer Knobelaufgabe ein Problemfeld entwickeln (siehe Pehkonen 1986).

Die Geometrie bietet eine gute Möglichkeit zum Üben des Problemlösens, weil man dort sich üblicherweise auf ein konkretes Modell und dessen Konstruieren stützen kann. Als Beispiel betrachten wir ein Problemfeld (Baue eine Schachtel); weitere Beispiele für Problemfelder findet man u.a. bei Pehkonen (1987, 1988, 1989).

Das allerwichtigste bei diesen Problemen ist die Art und Weise, wie sie im Unterricht vorgeführt werden: Das Problemfeld soll den Schülern stückweise dargeboten werden, und das Fortsetzen im Problemfeld soll immer von Schülerlösungen gelenkt werden. Wie weit man in ein Problemfeld eindringt, hängt von den Schülerantworten ab.

Beispiel: Baue eine Schachtel. Die folgende Schüleraktivität begründet sich auf einer Bastelaufgabe, die in der Zeitschrift Arithmetic Teacher erschienen worden ist:

1. Baue aus einem DIN A4-Papier nach dem Bild (Abb. 2) eine deckellose Schachtel! Schneide den einheitlichen Linien entlang und falte den Strichlinien entlang!

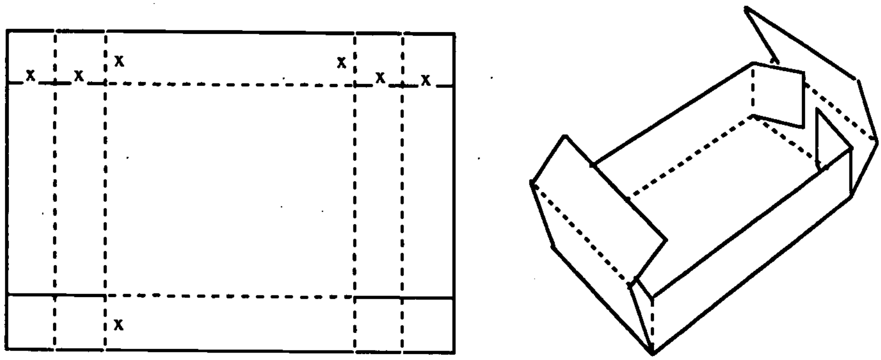


Abb. 2. Anweisung für das Schachtelbau.

2. Berechne das Volymen deiner fertigen Schachtel!

3. Wie soll x gewählt worden, damit das Volymen solcher Schachtel möglichst gross wäre? (Versuche z.B. mit den Taschenrechner verschiedene Werte für x.)

Diese Aktivität probierte ich im Januar 1989 in einer finnischen 8. Klasse in Helsinki. In der ersten Stunde gab ich den Schüler die Arbeitsblätter und andere Arbeitsmittel (DIN A4-Papiere, Scheren, Tachenrechner) und bat sie in Arbeitspaaren die Aufgaben im Arbeitsblatt zu erledigen. Ich betonte, dass jeder seine eigene Schachtel bauen soll, obgleich man zusammen arbeitet. Auch betonte ich, dass ein Ziel des Arbeitens ist, wie gut sie allein die Anweisungen im Arbeitsblatt verständigen können. D.h. ich war nicht bereit, Antworten zu ihren Fragen "Was sollen wir eigentlich machen?" zu geben.

Alle Schüler konnten innerhalb der Schulstunde die erste Aufgabe

(eine Schachtel zu bauen) erledigen, aber bei einigen entsprach die Schachtel nicht Abb. 2. Fast alle konnten die zweite Aufgabe (Das Volymen der Schachtel) berechnen; nur ein paar Schüler hatten vergessen, wie man das Volymen eines Quaders berechnet. Dagegen die Lösung zur dritten Aufgabe konnte nur ein Schüler, durch Berechnen verschiedener Volymina mit dem Tacshenrechner, finden. Einige Schüler stellten gute Hypothesen zur grössten Schachtel vor, aber weil sie aus jeder Schachtel ein Modell bauen anfingen, reichte die Zeit nicht.

In der nächten Stunde wurde die dritte Aufgabe zusammen behandelt: Ich hatte eine Folie aus dem Arbeitsblatt gemacht, die wir mit dem Overheadprojektor schauten, und zeichnete ein prinzipielles Bild an der Tafel. Eine Tabelle wurde zusammen an der Tafel angefertigt, wo man eine Spalte für die Länge, eine für die Breite, eine für die Höhe und eine für das Volymen hatte; zuerst hatten wir verabredet, welche die Länge und welche die Breite der Schachtel war. Zusammen wurde die Länge, die Breite und das Volymen der Schachtel berechnet, wenn 1 cm zur Höhe gewählt worden war. Danach hatten die Schüler als Aufgabe, die erwähnten Grössen zu berechnen, wenn die Höhe 2 cm/ 3 cm/ 4 cm/ 5 cm/ 6 cm beträgte.

Wenn die Tabelle erfüllt worden war (mit den ganzzahligen Höhen), fragte ich die Klasse, wo das grösste Volymen gefunden werden könnte. Als Antwort wurde die Höhe 3 cm angeboten. Erst wenn ich daran erinnert hatte, dass es auch andere als nur die ganzen Zahlen existiert, hatte ein Schüler 2,5 cm geratet. Dann hatte die Klasse das Volymen mit dieser Höhe berechnet. Der nächste Vorschlag war 3,5 cm, aber er hatte keine Unterstützung; nach der Diskussion wurde 2,7 cm vorgelegt. Wenn wir dies berechtet hatten, wurden entsprechend die Höhen 2,8 cm und 2,9 cm behandelt. So haben wir das Volymen der grössten Schachtel innerhalb der Grenzen der Messgenauigkeit.

4. Projekt: Offene Aufgaben im Mathematikunterricht

Als Komponenten des offenen Unterrichts werden die Eigenaktivität der Schüler sowie die Bedeutung der zum Lernen gehörenden Kommunikation im Lernprozess herausgestellt. Der traditionelle Mathematikunterricht kann durch diese Formen bereichert werden, zum Beispiel indem man offene Aufgaben (z.B. Problemfelder) mit einbezieht.

Das im Herbst 1987 eingeleitete Forschungsprojekt "Offene Probleme im Mathematikunterricht" (Pehkonen & Zimmermann 1989) gründet sich eben auf der Verwendung von offenen Aufgaben. Man erwartet hierdurch auch eine Verbesserung in der Qualität des Mathematikunterrichts, welches wiederum eine höhere Schülermotivation zur Folge haben wird.

Literatur:

Anon. 1987. Maths Talk. The Mathematical Association. Cheltenham: Stanley Thornes.

Anon. 1988. Mathematics for ages 5 to 16. Proposals of the Secretary of State for Education and Science and the Secretary of State for Wales. Department of Education and Science and the Welsh Office.

Bell, A., Rooke, D. & Wigley, A. 1978. Journey into Maths. Teacher's Guide 1. London: Blackie.

Brissenden, T. 1988. Talking About Mathematics. Oxford: Basil Blackwell.

Cockcroft Report 1982. Mathematics counts. Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools. H.M.S.O.

Damerow, P. 1984. Mathematics for all - ideas, problems, implications. ZDM 16 (3), 81-85.

Davis, P.J. & Hersh, R. 1985. Erfahrung Mathematik. Boston: Birkhäuser.

Hirsjärvi, S. & Remes, P. 1988. Suomalaisen koulutuksen tulevaisuudenkuvat. [Die Zukunftsbilder der finnischen Schulung.] Keuruu: Otava.

Kantowski, M.G. 1980. Some Thoughts on Teaching for Problem-Solving. In: NCTM Yearbook 1980, 195-203. Reston (VA): Council.

Lakatos, I. 1977. Proofs and Refutations. Cambridge: Cambridge University Press.

Leino, J. 1989. Teaching Geometry within the Framework of Constructivism. In diesem Band.

Maier, H. 1989. Problems of Language and Communication in the Mathematics Classroom. In diesem Band.

Martin, J.-C. 1986. A Necessary Renewal of Mathematics Education. In: Mathematics for All (eds. P. Damerow, M.E. Dunkley, B.F. Nebres & B. Werry), 13-17. Science and Technology Education. Document Series No.

20. Paris: Unesco.
Marton, F., Dahlgren, L.O., Svensson, L. & Säljö, R. 1977. Inlärning och omvärldsuppfattning. Almqvist & Wiksell Förlag.
NCTM 1989. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston (Va.): NCTM.
Ormell, C. 1983. Maths with Bite. Education 13 (3), 22-26.
Pehkonen, E. 1986. Über die Bedeutung der Knobelaufgaben. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1986, 227-230. Bad Salzdetfurth: Verlag Franzbecker.
Pehkonen, E. 1987. Knobelquadrate: Eine geometrische Unterrichtseinheit. Math. Unterr. Praxis 8 (2), 29-32.
Pehkonen, E. 1988. Offene Aufgaben im Geometrieunterricht. Math. lehren, Heft 29, 16-19.
Pehkonen, E. 1989. Mathematische Problemfelder bieten andere Möglichkeit. Math. Unterr. Praxis 9 (erscheint demnächst).
Pehkonen, E. & Zimmermann, B. 1989. Offene Probleme im Mathematikunterricht. In: Mathematics Education Research in Finland. Yearbook 1987-88 (ed. P. Kupari), 55-77. Institute for Educational Research. Publication series B. Theory into Practice 39. University of Jyväskylä.
Schoenfeld, A.H. 1987. Cognitive Science and Mathematics Education: An Overview. In: Cognitive Science and Mathematics Education (ed. A.H. Schoenfeld), 1-31. Hillsdale (NJ): Lawrence Erlbaum Associates.
Spiegel, H. 1982. Zur Situation des Mathematikunterrichts in der Primarstufe - Tendenzen, Probleme, Perspektiven. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1982, 112-121. Hannover: Schroedel Schulbuchverlag.
Walsch, W. 1985. Gedanken zur Realisierung des "Tätigkeitskonzeptes" im Mathematikunterricht. J. Math. Didakt. 6 (1), 3-14.
Wittmann, E. 1981. Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig: Vieweg (6. Auflage).
Wittmann, E.Ch. 1988. Das Prinzip des aktiven Lernens und das Prinzip der kleinen und kleinsten Schritte in systematischer Sicht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1988, 339-342. Bad Salzdetfurth: Verlag Franzbecker.
Zimmermann, B. 1981. Versuch einer Analyse von Strömungen in der Mathematikdidaktik. ZDM 13 (1), 44-53.

Günter Pietzsch (Berlin, DDR)

Planimetrische Konstruktionsaufgaben und problemhafter Unterricht

Zusammenfassung

Ausgehend von der Position, daß die Aneignung bzw. Ausbildung von Wissen und Können durch das Ausführen adäquater Tätigkeiten erfolgt, wird ein Konzept vorgestellt, bei dem das Lösen planimetrischer Konstruktionsaufgaben dem Erreichen vor allem globaler Ziele dient. Die Potenzen des problemhaften Unterrichts werden dadurch genutzt, daß das Herstellen einer geometrischen Figur mit geforderten Eigenschaften weitgehend ohne Nutzen einer algorithmischen Vorschrift geschieht. Die Art der Eigenschaften soll zum Durchdenken von Lösbarkeitsfragen anregen.

Vorbemerkungen

Konstruktionsaufgaben sind ein klassischer Bestandteil des Planimetrieunterrichts. Im wesentlichen hatten sie die Stellung, die ihnen schon Euklid zuwies: Im Vordergrund standen Fragen der eindeutigen Konstruierbarkeit und die Beschränkung der Konstruktionsmittel auf Zirkel und Lineal. Heute reicht die Einstellung zu den Konstruktionsaufgaben von "unverzichtbar" bis "alter Zopf". In meinem Vortrag möchte ich ihnen eine etwas andere Stellung zuweisen, sie in den Dienst etwas anderer Ziele stellen. Damit soll gleichzeitig ein Einblick in die gegenwärtige Konzeption des Mathematikunterrichts unserer allgemeinbildenden Einheitsschule gegeben werden. Dabei wird auf die Nutzung von Computern nicht eingegangen.

Allgemeine Thesen

(1) Nachdenken über Inhalt und Prozeß des Mathematikunterrichts geschieht immer vor dem Hintergrund der jeweiligen Ziele: Was soll - in einer einzelnen Stunde, über einen längeren Unterrichtsabschnitt, während der ganzen Schulzeit - erreicht werden? Hierbei sind zu unterscheiden

- lokale Ziele (Welcher mathematische Gegenstand soll durch die Schüler angeeignet werden?)

- globale Ziele (Welche übergreifenden Persönlichkeitseigenschaften sollen bei dieser Aneignung zugleich ausgebildet werden?).

Der Lehrer hat stets beide Aspekte zu bedenken, auch wenn im Einzelfall der eine oder andere im Vordergrund steht und die globalen Ziele durch Lehrbücher und Unterrichtshilfen nicht hinreichend konkret ausgewiesen werden.

(2) Aneignung von mathematischen Gegenständen und Verfahren geschieht vor allem durch die eigene Tätigkeit des Lernenden; Vortragen, Vormachen und anderes Informieren durch den Lehrer sind gewiß erforderlich, aber doch mehr als Hilfen anzusehen. Die auszuführenden Tätigkeiten sind als Schüler- bzw. Lerntätigkeiten anzusehen und müssen ziel- und inhaltsadäquat ausgewählt werden.

(3) Schülertätigkeiten können nicht nur von unterschiedlicher Komplexität sein, sie können auch unterschiedlich stark auf den mathematischen Gegenstand bezogen sein. Ohne unmittelbare Bindung an einen mathematischen Gegenstand, beim Arbeiten an ihm aber besonders häufig auftretend, sind die folgenden:

- Beschreiben, Erklären, Definieren
- Argumentieren, Begründen, Beweisen
- Umkehren von Frage- und Problemstellungen
- Anstellen funktionaler Betrachtungen
- Anstellen von Analogiebetrachtungen
- Aufstellen von Fallunterscheidungen
- Durchdenken von Lösbarkeitsfragen.

Wir bezeichnen sie als "allgemein-fachspezifische Tätigkeiten". Sie sind vorrangig auf das Erreichen globaler Ziele gerichtet.

(4) In noch stärkerem Maße auf globale Ziele gerichtet sind die gewiß nicht mathematikspezifischen "allgemein-geistigen Tätigkeiten", die Grundlage für die unter (3) genannten sind:

- Analysieren und Synthetisieren
- Vergleichen und Klassifizieren

- Abstrahieren und Konkretisieren
- Verallgemeinern und Spezialisieren.

(5) Schülertätigkeiten werden im Mathematikunterricht meist durch Aufgaben ausgelöst, diese verstanden als Aufforderung zum Handeln. Etwas vereinfacht sind dabei zwei Situationen zu unterscheiden:

a) Für das vollständige Lösen der Aufgabe steht dem Schüler eine Regel (ein System von Regeln, ein Algorithmus) zur Verfügung.
b) Allenfalls für gewisse Teile des Lösungsweges der Aufgabe steht eine Regel zur Verfügung.

Bei a) sprechen wir von einem Arbeiten mit Standardaufgaben, bei b) von einem Arbeiten mit Problemaufgaben.

Bei dieser Unterscheidung, die keine Zweiteilung der Menge der Aufgaben ist, muß bedacht werden:

- Was subjektiv eine Problemaufgabe ist, muß es objektiv nicht sein,
- was heute für einen Schüler eine Problemaufgabe ist, muß es morgen für denselben Schüler nicht mehr sein.
- Eine Aufgabe kann gleichzeitig für einen Schüler eine Problemaufgabe sein, für einen anderen Schüler der gleichen Klasse in der gleichen Stunde nicht.

(6) Immer dann, wenn in o.a. Bedeutung mit Problemaufgaben gearbeitet wird, sprechen wir von problemhaftem Unterricht. Er liegt z.B. auch dann schon vor, wenn die Schüler, nachdem sie in mehreren Fällen das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Zahlen ermittelt haben, nun umgekehrt alle Zahlenpaare ermitteln, die das kgV 20 haben.

Problemhafter Unterricht ist - über das Gesagte hinaus - vor allem gekennzeichnet durch ein hohes Maß an geistiger Aktivität und Selbständigkeit der Schüler. In jedem Fall werden durch ihn (mehr oder weniger stark) globale Ziele angestrebt.

(7) Unter einer planimetrischen Konstruktionsaufgabe (KA) verstehen wir eine Aufforderung an den Schüler zum Her-

stellen einer Figur (in der Ebene) mit vorgegebenen Eigenschaften. Beispiele:

a) Konstruiere ein Parallelogramm, in dem gilt:
   $b = 4$ cm ; $e = 7$ cm ; $\alpha = 50^{\circ}$

b) (Ein Kreis k und eine diesen nicht schneidende Gerade g sind auf einem Arbeitsblatt gegeben.)
   Konstruiere zwei Kreise, die k und g berühren!

Nicht einbezogen werden
- Aufgaben der Darstellenden Geometrie
- Konstruieren von Bildern zu gegebenen Originalen bei Abbildungen
- Zeichnen von Strecke, ... , Kreis.

Beim Einsatz von KA ist zu bedenken, daß jedes Kind gern etwas herstellt, zunächst ungerichtet aus vorhandenem Material, dann zielgerichtet hin auf materielle oder geistige Gebilde mit gewünschten, vorgestellten, geforderten Eigenschaften. Auch im beruflichen Leben stehen die meisten Menschen vor solchen Anforderungen; dabei müssen sie über die Vereinbarkeit von Bedingungen nachdenken und gegebenenfalls über notwendige Veränderungen bzw. wünschenswerte Optimierungen.

Aus dem bisher Gesagten ergibt sich die zentrale These:

(8) Die Behandlung von KA dient vorrangig globalen Zielen, der Ausbildung übergreifender Fähigkeiten, der Entwicklung konstruktiven Denkens als einer speziellen Form schöpferischen Denkens. Dies ist nur möglich durch problemhaften Unterricht.

Algorithmisches Arbeiten hat nur als Aufstellen von Algorithmen beim Formulieren der Konstruktionsbeschreibung (dies vor allem als Mittel sprachlich-logischer Schulung) seinen Platz. KA sollten nicht zum Abarbeiten von Algorithmen mißbraucht werden.

KA haben ihren Platz in allen didaktischen Funktionen.

(9) Es ist sinnvoll und ratsam, die Schüler für das Lösen

von KA zum Nutzen folgender nichtalgorithmischer Handlungsvorschrift zu befähigen (in Analogie zum Lösen von Sachaufgaben und als Spezialisierung zum Lösen von Problemaufgaben überhaupt):

Konstruktionsaufgaben	Problemaufgaben
- Vorüberlegung	- Analyse und Planung
- Konstruktion (ggf. mit Beschreibung)	- Ausführen des Planes
- Abschlußbetrachtung	- Auswertung und Weiterführung

Konkretisierung durch Beispiele

Es werden 3 Aufgabenkomplexe angegeben und kurz erläutert. Aus Platzgründen können die Kriterien für die Zusammenstellung und die Bezüge zu den in (3) und (4) genannten Tätigkeiten nicht ausführlich erörtert werden; sie sind aber leicht zu erschließen. Auf jeden Fall ist beabsichtigt, daß die Schüler die Zusammenhänge der einzelnen Teilaufgaben eines solchen Komplexes erkennen und dann auch selbst solche "Problemfelder" (s. Beitrag PEHKONEN) zusammenstellen.

Ferner wird hier nicht auf die Möglichkeit differenzierter Aufgabenstellung bzw. des Arbeitens in Gruppen eingegangen. Es muß nicht sein, daß jeder Schüler alle Teilaufgaben löst; wichtig ist dann aber das Zusammentragen von Einzelergebnissen. Nach gegenwärtigem Lehrplan der DDR sind die Aufgaben in der Klassenstufe 6 (Parallelogramm, Dreieck) und 7 (Kreis) einzusetzen.

Beispiel 1:
(Seiten und Winkel in üblicher Weise bezeichnet)
(1a) Konstruiere ein Parallelogramm!
(1b) ... , das kein Rechteck ist!
(1c) ... , das kein Trapez ist!
(2a) ... , für das gilt: $a = 4$ cm!
(2b) . . . . $a = 4$ cm, $\alpha = 50^0$

(2c) . . . . a = 4 cm, $\alpha = 50^\circ$, d = 3 cm
(2d) . . . . a = 4 cm, $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 100^\circ$
(3) . . . . a = 4 cm, $\alpha = 50^\circ$, b = 3 cm

Die Teilaufgaben (1) und (2) sind als Realisierungshandlungen zum Begriff "Parallelogramm" aufzufassen, dienen seiner Aneignung. Sie sind eigentlich - Kenntnis der Definition und der verwendeten Symbolik vorausgesetzt - keine Problemaufgaben. Die Schüler erkennen bzw. reflektieren darüber, daß die Zunahme der Bedingungen die Lösungsvielfalt einschränkt bis hin zu ihrer Unvereinbarkeit in (2d), daß die Bedingungen in (2c) einerseits voneinander unabhängig sind, andererseits aber das geforderte Parallelogramm und damit alle anderen seiner Eigenschaften festlegen. (1b) und (1c) dienen darüberhinaus der Begriffssystematisierung, (1c) und (2d) fordern als nichtlösbare Aufgaben in besonderer Weise zur Begründung heraus. Trotz äußerer Übereinstimmung mit (2c) und (2d) ist (3) von anderer Art, ist als Problemaufgabe aufzufassen. Zu ihrer Lösung kommt man mit der Definition nicht aus, benötigt man den Satz von der Kongruenz gegenüberliegender Seiten. Sie kann, je nach der Stelle ihres Einsatzes, der Motivierung dieses Satzes oder seiner Festigung dienen.

Beispiel 2 (Bezeichnung wie üblich):

Konstruiere ein Dreieck mit folgenden Eigenschaften!
(1) a = 3 cm ; b = 4 cm
(2) . . . . ; c = 5 cm
(3a) . . . . ; $\gamma = 50^\circ$
(3b) . . . . ; $\gamma = 100^\circ$
(3c) . . . . ; $\gamma = 90^\circ$

Vieles von dem in Beispiel 1 Gesagtem gilt hier sinngemäß. Von besonderem Interesse sind die Teilaufgaben (3). Wenn der Schüler bei (2) die eindeutige Lösbarkeit festgestellt hat, so weiß er, daß von (3a) bis (3c) höchstens eine lösbar sein kann. (3a) scheidet aus, weil γ der größte Innenwinkel sein muß. Ob (3b) oder (3c) oder keine von

beiden lösbar ist, muß durch Probieren oder Nachmessen der Lösung von (2) ermittelt werden; letzteres entfällt, wenn in (3) andere Seitenlängen als in (2) gewählt werden. (In Klasse 6 ist der Satz des Pythagoras bzw. seine Umkehrung nicht bekannt, und es ist auch nicht an seine Entdeckung gedacht.)

An diesem Beispiel sei auf ein Formulierungsproblem hingewiesen, das nicht als Nebensächlichkeit anzusehen ist. Es war und ist z.T. noch üblich, KA mit Hilfe des Wortes "aus" zu formulieren, z.B. "Konstruiere ein Dreieck aus den Seiten ...!". Eine solche Formulierung orientiert auf die Bestandteile (auf Baumaterial), gewissermaßen rückwärts. In einer kleinen Untersuchung konnte festgestellt werden, daß viele an derartiges Formulieren gewöhnte Schüler z.B. (1) als unlösbar ("reicht nicht aus"), hingegen z.B. (3a) als lösbar ("man braucht nicht alles") ansahen. Im Sinne von These (7) soll aber schon in der Aufgabenformulierung auf das Ziel , die herzustellende Figur mit ihren Eigenschaften orientiert werden, also etwa "Konstruiere ein Dreieck, in dem die Seiten ...!".

Unter logischem Aspekt ist noch eine andere Formulierungsfrage bedenkenswert. Sind die KA ausschließlich auf eindeutig lösbare Aufgaben ausgerichtet, so ist die Verwendung des bestimmten Artikels gerechtfertigt, aber auch nur dann. Wenn aber den mehrdeutig und den nicht lösbaren Aufgaben mehr Raum gegeben wird, so sind Formulierungen wie "Konstruiere ein (zwei, alle) Dreieck, in dem ...!" am Platz.

Beispiel 3
(Die in den Teilaufgaben jeweils genannten Punkte A, B, C und D seien auf einem Arbeitsblatt in geeigneter Lage vorgegeben.)
Konstruiere einen Kreis, der
(1) durch A geht (2) durch A und B geht
(3) durch A, B und C geht (4) durch A, B, C und D geht.

Die Steigerung in den Bedingungen ist hier von anderer Art aber ebenso offensichtlich. Während (1) problemlos und nur wegen der Vollständigkeit aufgenommen worden ist, sind (2) bis (4) als Problemaufgaben anzusehen. Dabei ist (2) Vorbereitung für (3) und (4) dessen Fortsetzung. Denn wenn jedes Dreieck genau einen Umkreis hat, liegt die analoge Frage für Vierecke nahe. Durch Konstruktion wird erkannt, daß es Vierecke ohne Umkreis gibt, das Markieren von 4 Punkten auf einem Kreis zeigt, daß es solche mit Umkreis gibt. Dies rechtfertigt die Bildung des Begriffs "Sehnenviereck".

Arbeiten mit Mengen

In der methodischen Literatur (einschl. Schulbüchern) werden, insbesondere für das Konstruieren von Dreiecken und Vierecken, mitunter verschiedene Lösungsmethoden hervorgehoben: Bestimmungslinien - Teildreiecke - Abbildungen (und Kombinationen daraus). Es werden dann Aufgaben formuliert, für deren Lösung die eine oder die andere Methode notwendig ist. Im Interesse der einleitend beschriebenen Ziele und möglichst vieler selbständiger und dabei erfolgreicher Schülertätigkeiten ist eine Beschränkung ratsam; es besteht ja kein Zwang zum Behandeln einzelner KA. Wegen seiner Allgemeinheit wird in diesem Konzept das Lösen mit Hilfe von Bestimmungslinien bevorzugt. Auch außerhalb der Mathematik bildet man beim Suchen nach einem Objekt mit mehreren Eigenschaften, zumindest in der Vorstellung, den Durchschnitt derjenigen Mengen, deren Elemente genau eine dieser Eigenschaften haben.

Beim Konstruieren z.B. eines Dreiecks (Aufgabe (2) im Beispiel 2) hat man mit dem Zeichnen der Strecke $\overline{AB} = 5$ cm alle Dreiecke mit dieser Eigenschaft vor Augen. Beim Finden des Punktes C zeichnet man zunächst alle Punkte, die von A den Abstand 4 cm haben usw.

Sollen die Schüler bei diesem Vorgehen erfolgreich sein, so müssen sie die üblichen Bestimmungslinien (das Wort muß

nicht fallen) erfaßt haben, z.B. den Kreis. Dazu sind gesonderte Übungen erforderlich, z.B.: Den Schülern werden zwei sich schneidende Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien $r_1 = 3$ cm und $r_2 = 5$ cm vorgelegt, und sie müssen (nachdem entsprechende Übungen an einem Kreis erfolgt sind) Punkte P einzeichnen, die durch Abstände charakterisiert sind (z.B. $\overline{PM} < 3$ cm und $\overline{PM} = 5$ cm). Umgekehrt müssen sie vorgegebene Punkte in dieser Weise beschreiben.

Schlußbemerkung

Auf viele Fragen konnte nicht eingegangen werden, z.B.:
- Verwenden der Wörter "Konstruieren", "Zeichnen", "Skizzieren"
- Einschränkung der Zeichengeräte
- Konstruktionsbeschreibung (kurz oder lang; vor oder nach oder anstelle der Konstruktion).

Sie sind nicht unwichtig, aber bei dem hier beschriebenen Anliegen zweitrangig.

Literatur (VWV - Verlag Volk und Wissen, Berlin (DDR))

Pietzsch, G.: Überlegungen zur Behandlung von Konstruktionsaufgaben.
Math.Schule 20(1982), Heft 7/8, S. 520

Pietzsch, G.: Problemhafte Unterrichtsgestaltung.
Math.Schule 19(1981), Heft 12 , S. 894

Lorenz, G.; Pietzsch, G.; Rehm, M.: Mathematische Schülertätigkeiten, dargestellt an einem Beispiel aus der Geometrie.
Wiss. Zeitschr. d. Humb.Univ. Berlin
Math.-Nat. Reihe XXVII(1978), Heft 6, S. 727

Lothar Profke (Giessen, FRG)

MEASURING AREAS BY MEANS OF HYPERBOLAS - teaching units in elementary geometry

Abstract
The method of measuring areas by means of hyperbolas is/was used in surveying to determine the areas of polygons directly. It is an example of application of mathematics which can be taken from reality into the classroom without reduction. This example needs no new subjects but it integrates several parts of the mathematics curriculum. Some realized units will be presented.

1. Constructing a measuring instrument for areas

The main parts of this unit was teached by U. Beck (Flensburg) with 7- till 9-graders.

The problem

A piece of land has to be planted with young trees. On an average each tree requires 4 m² of the ground. How many trees are needed? Or: Wanted is the area of that plot of land.
Each student gets a plan of that plot.

First solutions

- Exhaustion: Copy the plot out of the plan onto a square grid and count square
- Decomposition: Divide the ground-plan of the plot into quadrrangles and triangles, measure their sides and heights, calculate their areas, and sum them up.
- In both cases we get only the area of the "paper figure". The real area follows from that by taking into account the scale of the plan.

Measuring simultaneously length and width

When decomposing the figure into triangles, at each triangle we must measure the length of one side and the corresponding height. Is there an instrument which allows to measure both lengths simultaneously?
- Two scales, perpendicular to each other as the axes of a coordinate system, will do that.

- Divide the numbers of one axe by two and then the area of each triangle is the product of the two read numbers.
  Formerly such an instrument was used, named "Parallelglastafel".

Fig. 1

Measuring the areas of rectangles without any multiplication

At the stage before we must read two lengths and then multiply them to get the area of a rectangle or of a triangle. Wanted is an instrument which allows to read the area directly without any multiplication:
- Cut out rectangles and put them into the coordinate-system mentioned above, two sides of the rectangle onto the coordinate-axes.
- Now each rectangle is characterized by its "free corner", with length and width of the rectangle as coordinates.
- Join the free corners of all rectangles, which have the same area, with a smooth line. Write at the line the value of the area.
- Repeat these steps with other values of area.
- Now we can measure, at least approximately, the area of a rectangle as we measure the length of a straight line.

The pupils get from the teacher a paper with exactly drawn hyperbolas. The numbers at the curves mean areas of rectangles measured in cm^2
Fig. 2

Measuring the area of any polygon

We only need an instrument to measure the area of any triangle because we can divide each polygon into triangles. Of course we do not measure the area of the polygon in one step, rather measure each triangle seperately and sum up their areas. But analogously we determine the length of any polyogonal way.
Let us begin with the special case of rectangular triangles:
- Calculate the area of a given rectangular triangle.
- Put the triangle onto the hyperbolas-chart for rectangles in such a way that you easily can determine the area of the triangle:
  (1) Complete the triangle to a rectangle.
  (2) Measure the area of this rectangle by the hyperbolas-chart.
  (3) Divide this area by two.

This division of the read areas is done by the chart if we replace its area numbers by their halfs i.e. if we mark each hyperbola with the area number of the corresponding rectangular triangles.
With such a hyperbolas-chart for rectangular triangles you can measure the area of any polygon because it is possible to divide each polygon into rectangular triangles.

Improving the instrument

The division into rectangular triangles is a little troublesome. Is there a hyperbolas-chart for arbitrary triangles?
Well, a rectangular triangle is also an arbitrary triangle. Therefore: if at all there is a hyperbolas-chart for all triangles, it must be the already constructed instrument. Examine whether the hyperbolas-chart for rectangular triangles measures all triangles:

- Draw oblique triangles and calculate their areas.
- Cut these triangles out and try to measure their areas with the hyperbolas-chart ...
- ... but you get a number to small: The instrument gives the area only of a rectangular part of the triangle.
- You have other possibilities to put the triangles onto the hyperbolas-chart.
- Prove the method: All triangles with one side in common and the opposite corner on a parallel line to that have the same area.

Fig. 3

Considering the scale of a plan

Our instrument measures the area of "paper-figures" in cm². In the initial problem the paper figure shows the plan view of a plot of land true to scale e.g. 1 : 1000 = 1 : k. To get the real area we have to multiply the measured area of the paper figure by the conversion factor k^2. This multiplication can also be done by the hyperbolas-chart: Mark each hyperbola with the area number in m² corresponding to scale.
With this final step we have constructed a hyperbolas-chart which was in use in surveying till some years ago.

Fig. 4

Characterization of the teaching unit

We can characterize this teaching unit as follows:
- Re-invention of the method measuring areas by the mean of hyperbolas.
- Thereby beginning with a problem from real life and searching for always more economic methods of area-measuring.
- Commercial hyperbolas-charts appear not before the end of the teaching unit.

2. Analysing a measuring instrument for areas

This unit was teached with 8-graders.

Characterization of this teaching unit

- The starting point is a commercial hyperbolas-chart.
- Investigation how this instrument works.

The problem

"Determine the area of a plot of land by using a plan with known scale". The teacher presents an example. The teacher shows a commercial hyperbolas-chart. "With such a chart you can measure areas directly i.e. without measuring lengths and multiplying them.
How will work this instrument?"

Simplification of the problem

We restrict ourselves to rectangles.
The students get a simplified hyperbolas-chart for measuring the areas of rectangles in cm^2 (Fig. 2).
- Draw some rectangles, calculate their areas, and try to determine the same values by means of the hypberbolas-chart.
- What is the matter, if the "free corner" of a rectangle does not lie exactly on a curve?
- Give instructions for use of the hyperbolas-chart.

Construction of hyperbolas

Pupil's question: "How to draw such a curve?"
All points of one curve are free corners of rectangles which all have the same area.

Now you can continue, partly or wholly, as in the first teaching unit.

3. From inversely proportional functions to the measuring of areas

This unit was not held, but in Germany it fits to the mathematics curriculum for 7-graders.
An exercise to inversely proportional functions

- Give rectangles with the area 12 cm^2.
- Draw some of these rectangles with two sides on the coodinate axes and draw the whole graph of the function "length -> width".
- Do the same with the values 6 cm^2, 18 cm^2, 24 cm^2, ... in the same picture.

Change of the point of view

- Draw any rectangle and cut it out.
- Determine its area approximately by means of the drawn graphs. Check this area-value by calculating.
- Describe an instrument for measuring the area of rectangles (without measuring length und width and multiplying them).

Now we can follow the first teaching unit.

Characterization of the teaching unit

- We begin in algebra with an example of inversely proportional functions.
- The step to an instrument for measuring areas of rectangles may seem to be little but it means a change of standpoint: therefore it is novel and surprising.
- This teaching unit combines algebra and geometry.

4. Supplements

Not yet teached.

Hyperbolas-charts as nomograms

With a hypberbolas-chart you can multiply, divide, and determine square-roots.

Geometric properties of a hyperbolas-chart

Thus far a hyperbolas-chart is a tool for measuring areas. Now we have it for subject for a mathematical investigation:
- Symmetries
- Are the distances between adjacent curves always the same?
- Are any two of the curves similar?
- A hypberbolas-chart shows contourlines of a surface which has an equation $z = \text{const} * xy$. This surface is part of a hyperbolic paraboloid. Straight lines of this surface are perpendicular to the x-axe and to the y-axe.

5. Didactical remarks

The **mathematical subjects** need no further justification, because they are compulsory in geometry teaching. The teaching units, reviewed above, therefore give opportunity to prepare or to repeat subjects and to integrate knowledge such as
- measuring areas, geometric constructions, scales of plans and non-linear ones of hypebolas-charts, coordinate systems, calculating with inexact measured values, manual training.

The teaching units can promote the **achievement of instructional goals** such as
- defining and performing algorithms, using plans, combining algebra and geometry, simplifying problems, generalizing known solutions, arguing.

Mainly the teaching units give an example of the application of mathematics with the following characteristics:
- Integration of knowledge from different (non-)mathematical fields
- Complex problems which are not prepared for solution, with many data, which need repeated application of some routines.
- Use of authentic material (which partly must be provided).

The method of measuring areas by hyperbolas-charts does not need be simplified for classes and can be treated both with different classes and with "higher" and "lower" achievers.

Reference

U. Beck - L. Profke: Das Hyperbelverfahren zur graphischen Flächeninhaltsbestimmung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. In: H.-J. Vollrath (Ed.): Praktische Geometrie - Darstellen, Messen, Berechnen. Stuttgart: Klett 1984, p. 40 - 82

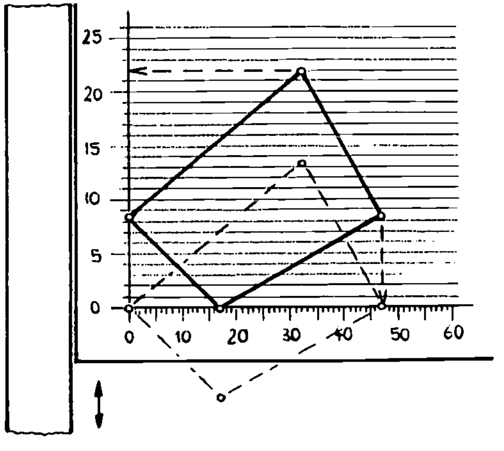


Fig. 1 Parallelglastafel

(a) ... positioning
(b) ... moving parallel along a ruler
(c) reading the values of length and height
(d) area of the quadrangle = $47 \cdot 22\ mm^2$

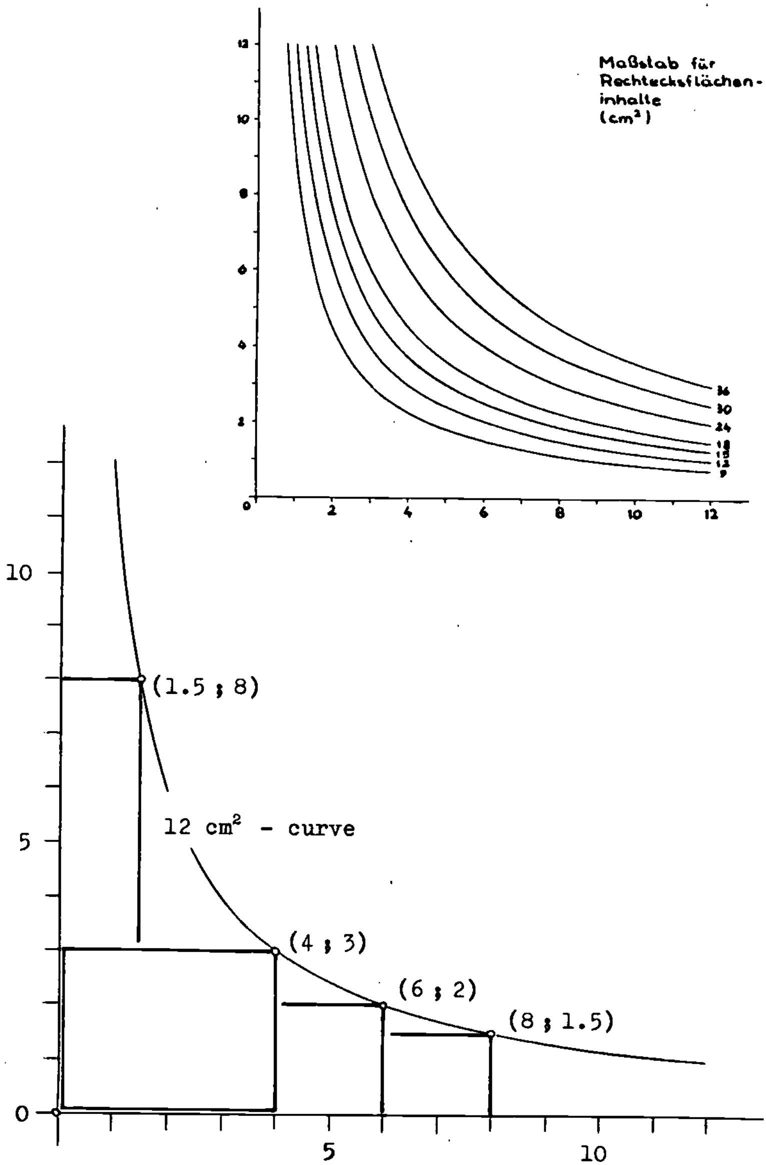


Fig. 2 Characterizing rectangles by their
„ free corners "

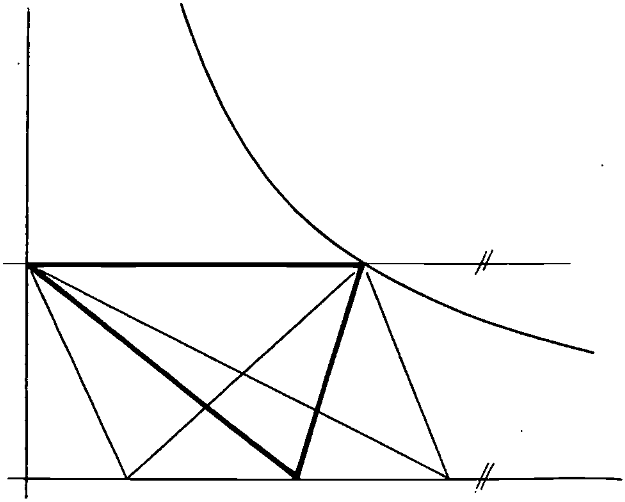


Fig. 3 Measuring the areas of
obliques triangles

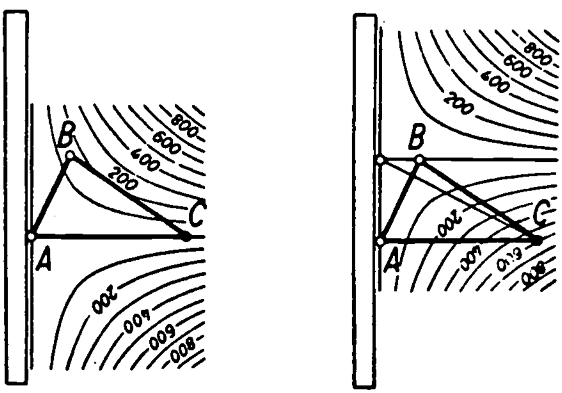


Fig. 4 Hyperbolas-chart for surveying

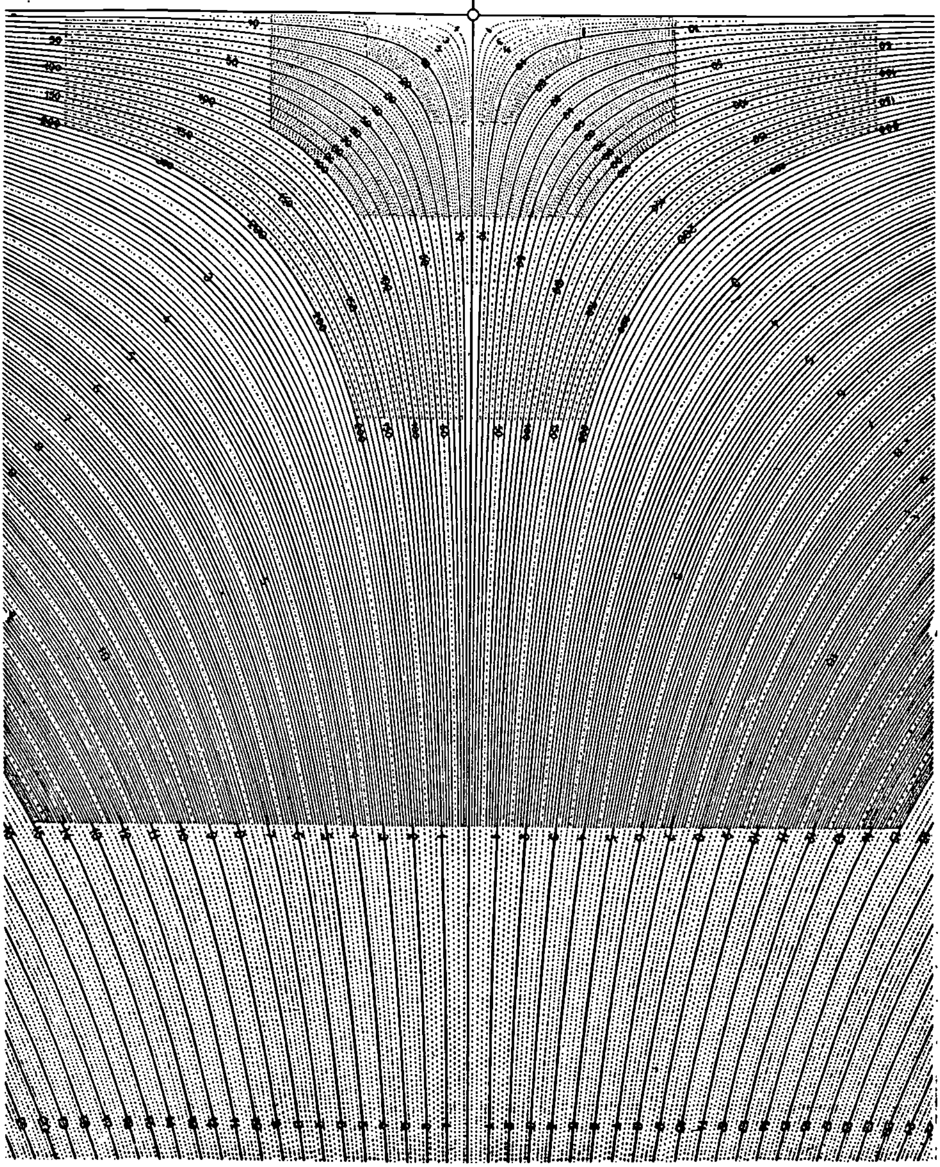
(a) positioning
(b) moving parallel along a ruler
(c) reading the real area-value of triangle ABC

Hyperbeltafel

nach M. Kloth

1 : 500

Berechnung, Kartierung und Zeichnung
E. Funke, Arnsberg, 1949.



Erkki Rosenberg (Helsinki, Finnland)

ELLIPTISCHE SEKTORDIAGRAMME

Zusammenfassung

Der Verfasser hat darauf higewiesen, dass Prozentverteilungen heutzutage immer häufiger mit elliptischen Sektordiagrammen veranschaulicht werden. In den Schulen wie auch in den Lehrbüchern werden immer noch nur Kreissektordiagramme verwendet. Wie die Schüler von den elliptischen Sektordiagrammen Abschätzungen machen können, wie sie diese zeichnerisch auf Kreissektordiagramme abbilden und rechnerische Untersuchungen machen können, das wird in diesem Artikel auf Grund empirischer Untersuchungen behandelt.

Die finnischen Schüler sind schon in der Grundschule an Sektordiagramme sehr gut gewöhnt. Statistische Daten werden mit ***Kreissektoren*** veranschaulicht. Die Umrechnungen

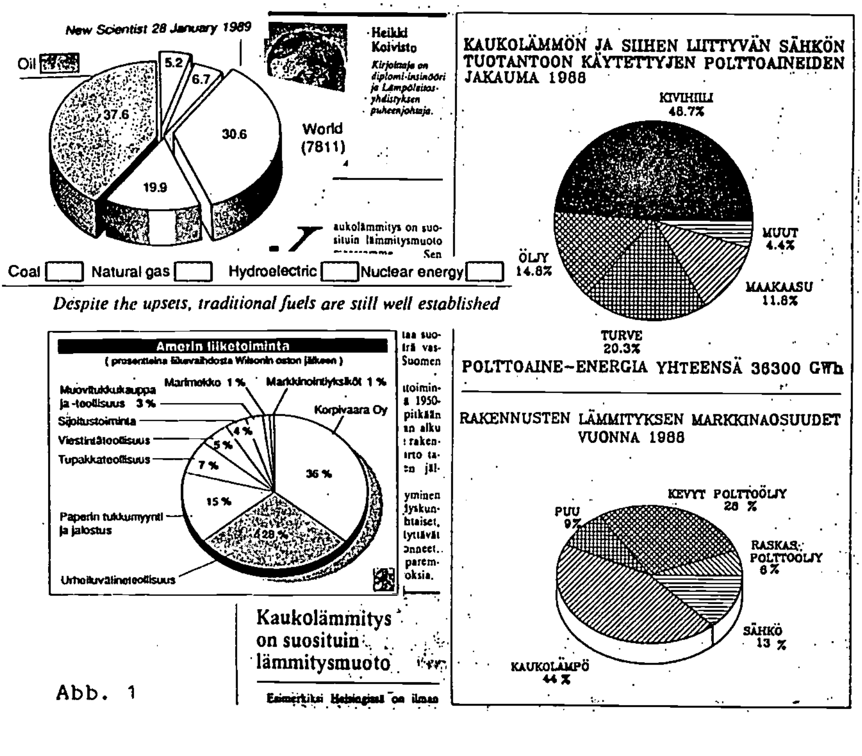


Abb. 1

von Prozenten zu Graden und umgekehrt scheinen ganz einfach zu sein.

In den letzten Jahren hat man jedoch begonnen, mehr und mehr ***elliptische Sektordiagramme*** in Zeitungen und in Reklamen zu benutzen (Abb. 1). Eine Ursache dazu ist wohl die Möglichkeit, schnell und bequem die graphischen Darstellungen mit Elektronischen Datenverarbeitungsanlagen zu zeichnen.

Als ich den ersten elliptischen Sektordarstellungen begegnete - es war vor sieben Jahren - handelte es sich um eine prachtvolle Reklamausgabe der finnischen Industrie, die an alle finnischen Schulen gesandt wurde. (Eine schwarzweisse Kopie von einem von den vielen Bildern: Abb. 2.)

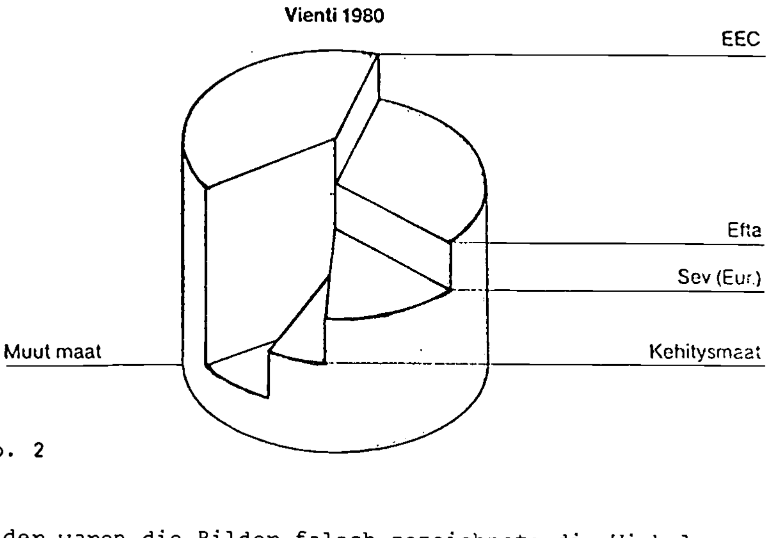
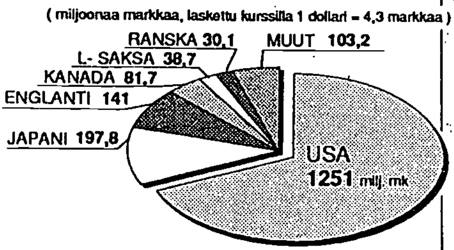


Abb. 2

Leider waren die Bilder falsch gezeichnet: die Winkelmassen waren gleichmässig proportional zu den Prozentzahlen. Als ich mich bei dem Herausgeber darüber beklagte, bekam ich die Antwort: "Die Bilder sind ja leider falsch gezeichnet aber das macht nichts, weil die richtigen Zahlen in dem Text erwähnt sind." - Ich frage nur, wofür dann die Veranschaulichungen sind!

Nunmehr sind die elliptischen Sektordiagramme i. a. richtig gezeichnet (Abb. 3).



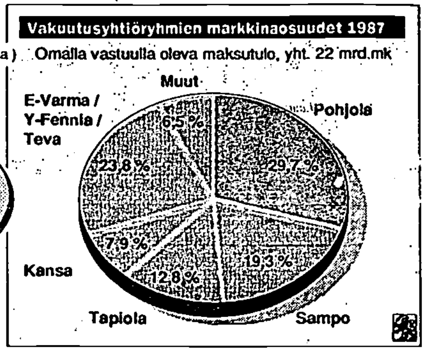


Abb. 3

Die Zeichnungen sind also *affine Abbildungen der Kreisdiagramme*. Mit den EDV-Anlagen ist es ebenso leicht einen Kreis mit den Gleichungen

$$x = r \cos t, \qquad y = r \sin t \qquad (1)$$

zu zeichnen wie auch eine Ellipse mit den Gleichungen

$$x = a \cos t, \qquad y = b \sin t \qquad (2).$$

Der Parameter t ist hier die sog. *exzentrische Anomalie*, die hier auch *gleichmässig proportional* zu den *Prozentzahlen wächst*.

Fragt man die Schüler schnell und beiläufig nach der Grösse der elliptischen Sektoren, bekommt man ziemlich richtige Abschätzungen. Das habe ich auch probiert: die 43 Schüler in zwei Klassen (11. und 12. Schuljahr) machten mit blossen Augen je 16 Prozentabschätzungen. Die Resultate waren gut: ein Sektor von 20,3 % gab 19,2 $\pm$ 4,6 % / 20,5 $\pm$ 4,3 %, bzw. 44,4 % gab 43,2 $\pm$ 4,3 % / 43,4 $\pm$ 2,5 % und 10,9 % gab 12,0 $\pm$ 2,4 % / 11,6 $\pm$ 2,3 % usw. Also die Genauigkeit von ca. $\pm$ 4 %-Einheiten ungeachtet wie gross die Abplattung (b/a) war. Dies ist ja verständlich, wir lesen auch nicht senkrecht auf dem Papier, sondern aus einer veränderlichen Richtung. Unser Gehirn hat sich so gewöhnt, affine Transformationen zu machen.

Stellt man aber ein solches Bild z.B. in eine Schularbeit, so werden die Schüler sozusagen verirrt. Sie messen die Winkelmassen und geben falsche Resultate oder gar keine Resultate. So geschah es auch, als ich in dem gymnasialen Kursus von der Ellipse und von der Herleitung ihrer Gleichung mit einer affinen Abbildung vorher gelernt hatten.

Ist das Prinzip eines elliptischen Sektordiagramms und auch das zeichnerische Lösungsverfahren mit einem umgeschriebenen Kreis erklärt worden, so können die Schüler die Bilder sehr gut analysieren und wählen auch gern solche Aufgaben von den mehreren wahlfreien Testaufgaben. (Abb. 4.)

6. Vieressä on kallistettuna sektoridiagrammina Outokumpu Oy:n jalostusarvon jakaantuminen toimialoittain v. 1988. Palauta ellipsi takaisin ympyräksi ja mittaa sektorien %-osuudet.
7. Taulukkotietojen mukaan Maan keskietäisyys Auringosta (= rataellipsin isoakselin puolikas) on (a =) $1{,}495979 \cdot 10^{11}$ m ja rata *eksentrisyys* $e = c/a = 0{,}01673$. Laske näiden perusteella Maan pienin etäisyys Auringosta (tänä vuonna Maa oli perihelissä 2.1.89) ja suurin etäisyys (4.7.89).

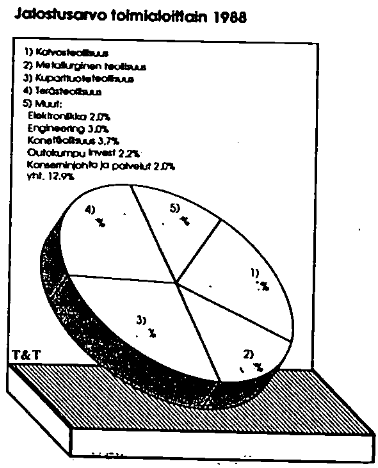


Abb. 4

Die Zusammendrückung vom Kreis zu einer Ellipse ist eine affine Abbildung, die man mit einer *parallelen Projektion* von einer Ebene auf eine andere bekommt. Sie ist also nicht ein *Perspektivbild*, die eine *Zentralprojektion* wirft. Die Parallelprojektion kann man sich wohl als einen Grenzfall der Zentralprojektion denken, wenn der Augenpunkt unendlich entfernt. Die elliptischen Sektorbilder erscheinen also wie gewöhnliche Kreissektorbilder auf einer schiefen

Ebene, wenn man diese von einer grossen Entfernung betrachtet.

Es ist auch möglich, echte Perspektivbilder zu verwenden (Abb. 5), aber dann muss man unbedingt mehr Information

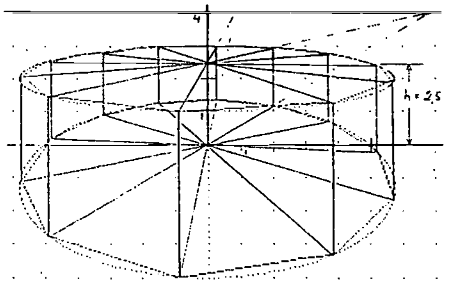


Abb. 5

von dem Projektionszentrum geben (der Horizont h mit dem Hauptpunkt H^c und die Distanz $d = OH^c$). Ich glaube jedoch, dass man dadurch nicht mehr Veranschaulichung oder andere Vorteile bekommen kann.

Das Winkelmass des Radius einer affinen Ellipse kann man entweder an dem umgeschriebenen Kreis messen oder mit einem Taschenrechner kalkulieren. Die exzentrische Anomalie t (d.h. das Winkelmass in dem Kreis) gibt für die affine Ellipse das Winkelmass

$$u = \arc\tan\left(\frac{b}{a}\tan t\right) \qquad (3)$$

(a und b sind die halbe Hauptachsen der Ellipse). (Abb. 6)

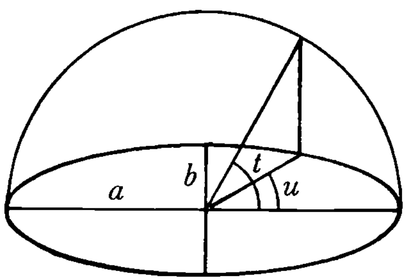


Abb. 6

Der Unterschied

$$t - u = t - \text{arc tan } \left(\frac{b}{a} \tan t \right) = f(t) \qquad (4)$$

verschwindet bei den Hauptachsen, $t = n \cdot 90^\circ$ $(n.\frac{\pi}{2})$, und bekommt seinen Maximumwert, wenn die Ableitung

$$\frac{df}{dt} = 1 - ab/(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t) \qquad (5)$$

verschwindet, d.h. wenn

$$\sin^2 t = \frac{1}{1 + b/a} \qquad (6)$$

ist.

Die Abbildung 7 zeigt, wie der Unterschied (4) bei einigen Fällen (hier: a/b = 3/2, 4/2, 5/2, ..., 9/2 und 10/2)

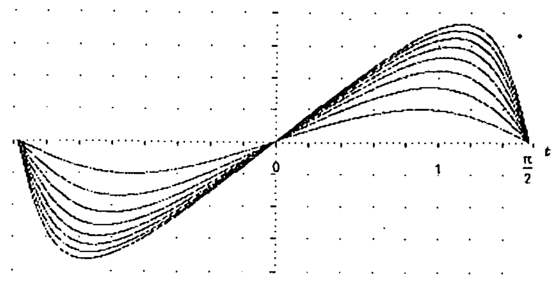


Abb. 7

wächst. Z.B. für den Fall

$$b = \frac{1}{3} a \qquad (7)$$

gibt die Gleichung (6) für den Maximumwert die Gleichung

$$\sin^2 t = \frac{1}{1 + 1/3} = \frac{3}{4}$$

und

$t = 60^\circ$ $(\pi/3)$, bzw. $u = 30^\circ$ $(\pi/6)$.

(S. Abb. 6)

Die Sektoren in der Mitte (der Parameter t nahe 90° oder 270°) sehen grösser aus bzw. die Winkel an der rechten oder linken Seite kleiner als in dem Kreis. Diese Eigenschaft hat man offensichtlich verwendet, um das eigene Produkt hervorzuheben (S. Abb. 8).

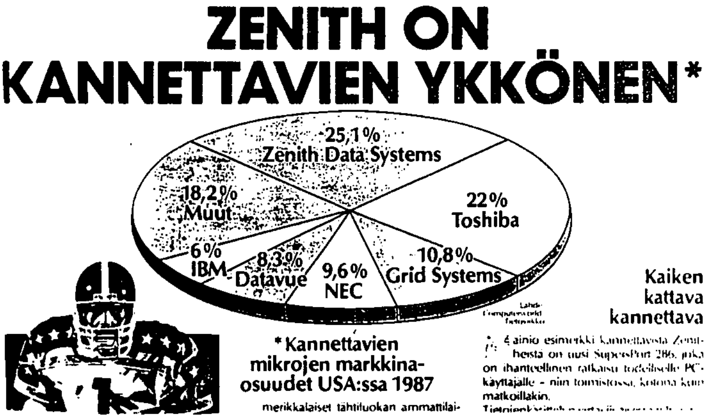


Abb. 8

Passende Übungsaufgaben für die EDV-Stunden geben die Sektorbilder, wie man z.B. die Abb. 9 mit zehn ebensogrossen Sektoren und Rändern programmieren kann.

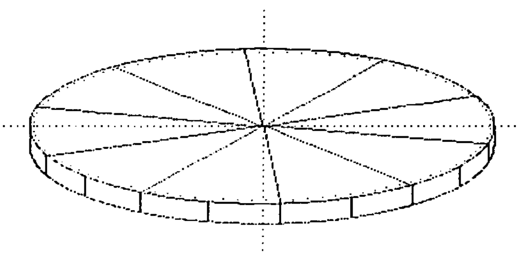


Abb. 9

Pasi Sahlberg (Helsinki, Finland)

VIDEO FILMS FOR GEOMETRY TEACHING

Abstract

Video films are not much used in mathematics teaching in Finland. One reason for this is the lack of educational audio-visual material as well as the guidance how to use video films effectively. The Finnish Broadcasting Company (Oy Yleisradio Ab) has produced a series of four films called *What is maths good for?* for use in the teaching of geometry. In this paper the educational aspects behind them are discussed. There were three main objectives when these films were planned: First, to make geometrical concepts alive and real. Second, to develop interactivity in audio-visual teaching in mathematics. And third, to teach different strategies to think and gather data.

Introduction

There are very few films available for mathematics teaching in Finland. Mathematics has had perhaps the least demand for educational films among teachers. There are tens of programmes in the fields of science and history. Traditionally, mathematics has been thought to be a typical "chalk-and-talk" subject at school.

Why use films in geometry teaching?

The possibilities and effects of video and television are not as obvious as it seems at first glance. The user of the audio-visual teaching aids should be aware of the properties and possibilities of these these pieces of equipments. Things like when to show a film, how to link it to the learning process and what to do after watching have to be declared in advance. Television and video are marvelous for integrating teaching between different school subjects and the increasing use of them should likewise be considered also in mathematics teaching.

Each teacher will face a question like: "Why should I use video in my mathematics teaching?" This type of question should be very carefully answered. The video film must not be shown just because it is good fun for pupils or it happens to be available at that particular moment. At least four good reasons can be found when this issue is analyzed.

1. Television is an effective way to tell pupils about the *history of mathematics*. Modern technology gives us many opportunities to make the early years of mathematics alive and real. Understanding the development of mathematics is an essential part of building a deeper knowledge and understanding of mathematics. A video film can help a teacher to tell these stories and what is more, in a fast and sophisticated way.

2. It is very important to motivate pupils to study mathematics. This can be done in many different ways. One of the best ways is to show the role of *mathematics in everyday life*. Probably the most frequent questions that a teacher hears from pupils in a mathematics lesson is: "What can we do with this? What is this good for?" Sometimes it is not easy to convince pupils that mathematics is a useful subject at school. The message from television is powerful. Pupils watch it every day and belive in most things they see or here. Through video film it is easy to make pupils realize the possibilities of mathematics also outside of school, in everyday life.

3. Pupils tend to act in a teaching-learning process like their teacher does in the classroom. They need guidance in the models of thinking and acting in many ways. An important mathematical act is a facing a problem or a situation with no tools to go on. Many times it seems like pupils are afraid of trying to solve problems. Problem solving should be challenging for them. With a video film it is possible to show that problem solving is fun and not too difficult either. Pupils can be encouraged to get involved with longer lasting problems and individual research as an out-of-school activity.

4. There are different kinds of attitudes toward mathematics in every class. Many pupils feel like mathematics is not a part of the world they

are living in. That is why they dislike it. Many people - even outside of the school - seem to think that mathematics is not for girls, or at least that boys are better in mathematics than girls (Karjalainen 1988). These attitudes should be changed but how? When television has formed so many of our positive and negative attitudes concearning everyday life why don't we use this same tool with our pupils. In *What is maths good for?* these aspects are considered and taken into account. Girls have an essential and active role in introducing the theme and in the problem solving processes.

Geometry is an exceptionally interesting topic from the educational films point of view. Many of the problems that deal with everyday life are not so easy to present in a normal classroom environment. Measuring the height of the high tower is one example of this. Television gives us an opportunity to face these problems effectively, easily and in such a way as to make it fun. However, it should be kept in mind that nothing can replace the active action of the pupil, not even a video. Television and video should be controlled teaching aids for motivating, inspiring and guiding the learning in the classroom.

What is mathematics good for?

The Finnish Broadcasting Company has produced four films for secondary school mathematics teaching. This series is called *What is mathematics good for?* Most mathematical films for schools use that have been shown in Finland are made in England, The United States or Japan. There is a very low level of Finnish production of mathematical films.

The main objective of the films - as the name of the series makes clear - is to show real situations to young people so that they then can use mathematical skills and knowledge to solve problems. The films are called:

How to measure heights?
How to measure a perimeter?
How to measure a scale?
How to draw a right angle?

In each film attention is paid to a single concept or theme. Some educational films try to cover too much. Television is a powerful tool in teaching and film-makers should be careful not to put too much information into a short programme. *What is maths good for?* consentrates on making the concept or topic alive and to look at it from several different directions. All the programmes have only one or two concepts to be learned. The films were made in co-operation with pupils and a mathematics teacher.

Some principles behind the use of educational film in mathematics teaching

In the following paragraphs three main principles of *What is maths good for?* are discussed.

1. Mathematics in everyday life

It is often difficult to create real problem situations of everyday life in mathematics teaching. "Let´s suppose that ... " sentences are either artifical or too far from reality for a teenager. Television introduces problems in an understandable and interesting way. With the high technology of these days it is possible to change the conception of time and place and also gain or shorten the duration of the events. Television is the best possible substitute for reality.

2. Teaching thinking skills and the gathering of data

More and more attention has been paid to teaching thinking skills in general education in Finland (Lehtinen 1989). That can also be done in mathematics. Geometry is based mostly on deductive thinking but thinking inductively is an important skill as well. In *How to measure a perimeter* three youngsters use an inductive method to solve a problem.

Pupils often feel themselves helpless in front of the problem. It is necessary to teach different ways of collecting data for solving the problem. Pupils should understand that in real life as important as it is to know how to do something it is as important to know where to get advice to go on. The right attitude is: If you don´t know how to go on, find somebody who does!

3. The usefulness of the properties of the video and television

When planning a programme for educational use all possiblities of video technology and television as a teaching aid should be considered. Mathematics teachers should also plan their television lessons carefully. Television is one of the best ways to activate conversations in the class. Conversation should always be included in every lesson where television is used for teaching. Critical thinking can be taught through searching events from the film that could have been done better in another way.

Experiences in using video in geometry teaching

There is lack of audio-visual material for geometry teaching in Finland. Many of the mathematics teachers have not got used to work with the video in their classes. According to feedback from several teacher inservice training sessions, it is obvious that today there is a demand for video films in mathematics teaching. Almost all schools have regular video machines which makes it possible to use films in teaching.

There are some interesting observations the use of films mentioned in this article (Sahlberg 1987). The experience is limited to a very short period of time (these films have been available only for six months now) and it is not based on scientific research.

The pupils have felt the themes of the films familiar and interesting. In many cases it has been easier to activate pupils to make their own measurements and testing - even to do small investigations and project works. Teachers have told that it has been easier to talk about geometry after watching a film. The conversations have generally been lively and deeper in the mathematical sense. Also the pupils who are slower to learn and have difficulties to follow normal teaching have been more actively involved in learning.

There are also some observations that should not be passed over without a word or two. Television has today - especially among young people - an entertainment function. It is quite difficult to forget this role when the television is used for other purposes. This is not only a pupils´problem but also

a teachers´. Sometimes those films that have been made for educational purposes, to be used as a dynamic teaching aid, have been used for entertaining pupils or to fill the empty space at the end of the lesson. This causes more damage than good. After this kind of watching of television it is more and more difficult to know when the message should be taken as a piece of knowledge and when it should be taken as a harmless show. Teachers should carefully consider how to use audio-visual material in their classes.

To make *What is maths good for?* more effective and versatile there are four help sheets for teachers. They include some ideas how to use the film as a part of teaching and questions for starting discussions either before and after watching. In these sheets it is also been underlined that the practical activities done by the pupils themselves can very seldom be replaced by television or any other piece of equipment. We always have to give good reasons for the use of television in our teaching and we should carefully think if the pupil can learn the same thing in some other manner.

References

Karjalainen, O. 1989 The development of mathematics attitudes on the upper level of the comprehensive school. In P. Kupari (ed.) Mathematics education research in Finland. Yearbook 1987 - 1988. University of Jyväskylä. Institute for Educational Research. Publication Series B. Theory to Practice 39, 1 - 24.

Lehtinen, E. 1989 Vallitsevan tiedonkäsityksen ilmeneminen koulun käytännöissä. Kouluhallituksen julkaisuja 18, Valtion painatuskeskus. Helsinki.

Sahlberg, P. 1987 What we can do with Trigonometry? In H. Kautschnitsch & W. Metzler (ed.) Medien zur Veranschanlichung von Mathematik. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 323 - 328.

Heinz Schumann (Weingarten, BR Deutschland)

Neue Möglichkeiten des Geometrielernens durch interaktives Konstruieren

Zusammenfassung

Die traditionellen Werkzeuge weisen als Mittel der Erschließung planimetrischer Begriffs, Satz- und Operationssysteme erhebliche Defizite auf, die durch den Einsatz geeigneter interaktiver 2-D-Grafiksysteme ausgeglichen werden können. Anhand eines prototypischen Grafiksystems werden neue Möglichkeiten der konstruktiven Aneignung der Planimetrie beschrieben.

1. Einleitung

Eine wesentliche Form des Geometrielernens ist das Geometrielernen durch handlungsorientierte Exploration und Rekonstruktion von geometrischen Begriffs-, Satz-, und Operationssystemen. Die methodisch-didaktische Aufbereitung solcher Systeme, die, zusammen mit den geeigneten Explorations- und Rekonstruktionsmitteln, den Großteil einer Lernumgebung ausmachen, ist eine anspruchsvolle Lehrer-Tätigkeit.

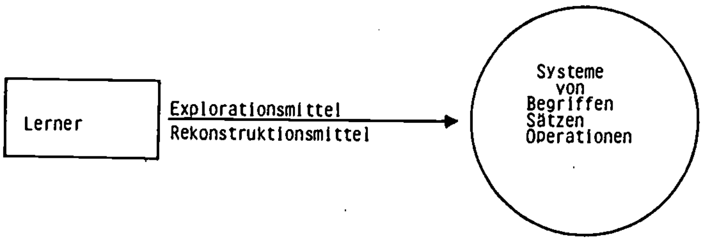


Abb. 1

Ein die übliche Aneignung der schulischen Elementargeometrie weithin bestimmendes Explorations- und Rekonstruktionsmittel stellen die traditionellen Werkzeuge dar: Zirkel, Lineal, Zeichendreieck; Meßlineal, Winkelmesser (kombiniert im sog. Geodreieck); Papier und Bleistift.
Wir vertreten im weiteren folgende These:
Die herkömmlichen zeichnerisch-konstruktiven Werkzeuge weisen als Mittel zur Erforschung und Rekonstruktion der synthetischen Elementargeometrie durch den Schüler erhebliche Defizite auf.

Solche Defizite allgemeiner Art sind:

Geringe Unterstützung

- des epistemischen Verhaltens
- des individualisierten Lernens
- des ökonomischen Arbeitens
- des Ausbildens beweglichen und funktionalen Denkens
- des Entwickelns und Anwendens intellektueller Techniken und heuristischer Strategien usw.

Mit dem Einsatz geeigneter interaktiver Grafiksysteme zum schulgeometrischen Konstruieren können diese Defizite ausgeglichen werden. Solche Grafiksysteme müssen kompatibel zur Schulgeometrie sein und Konstruktionsmöglichkeiten besitzen, die über die Simulation von Zirkel-,Lineal- und Geodreieck-Konstruktionen und von herkömmlichen Meßvorgängen hinausgehen (vgl. Schumann 1988). Aufgrund prinzipieller Probleme bei der Entwicklung interaktiver 3-D-Systeme für den Schüler der Sekundarstufe muß man sich vorerst auf einen Einsatz im Bereich der 2-dimensionalen Elementargeometrie beschränken. Aus software-ergonomischer Sicht sind besonders solche 2-D-Grafiksysteme geeignet, die eine desktop-orientierte Benutzeroberfläche besitzen (Prototypen: Cabri-Geometer, Laborde et al. 1988; Geolog, Holland 1989). Vorarbeiten für einen Ausbau dieser Tools zu intelligenten tutoriellen Systemen für das Lösen bestimmter Klassen von Konstruktionsaufgaben bzw. für die Unterstützung bei der Systembedienung sind im Gange.

Der Einsatz solcher Grafiksysteme kann nur die herkömmlichen Werkzeuge ergänzen, aber nicht ersetzen, weil

- wir letztlich nicht wissen, welche Bedeutung der taktile Umgang mit den traditionellen Analog-Werkzeugen bei der Aneignung geometrischer Grundkenntnisse zukommt (ein "Caspar-Hauser-Experiment", in dem die Wirkung des Geometrielernens allein mit dem Computer untersucht würde, verbietet sich).
- das Arbeiten mit den herkömmlichen Konstruktions- und Meßwerkzeugen eine kulturelle Technik darstellt, die nicht nur im mathematik-geschichtlichen Kontext von Bedeutung ist.
- die Kontinuität des schulischen Curriculums gewährt bleiben muß.
- diesen Werkzeugen ein universeller, nicht verbaler Kommunikationsstandard innewohnt.
- die Analog-Werkzeuge für die handwerklichen Anwendungen unentbehrlich sind (so ergab eine repräsentative Befragung deutscher Verbraucher nach ihren Freizeittätig-

keiten 1986/1987, daß sich 43 % von ihnen mit Heimwerken /Do it yourself beschäftigen).

Folgende grundsätzlichen Einwände gegen den Computereinsatz zum geometrischen Konstruieren in der Schule können erhoben werden:

- Verlust an routinehaften Fertigkeiten im Umgang mit den traditionellen Konstruktionsinstrumenten
- Defizite im Begreifen geometrischer Begriffe, Aussagen und Operationen
- (Anfängliche) Schwerpunktverlagerung vom Konstruktions- zum Interaktionsproblem mit dem Grafiksystem
- Zurückdrängung des Beweisens geometrischer Aussagen
- Selektion systemgeeigneter Stoffe
- Schwächung eines universalen Kommunikationsstandards
- Organisationsprobleme, die den Einsatz betreffen.

Irritationen in der visuellen Wahrnehmung von mit dem 'Computer' erzeugten geometrischen Figuren, wie sie durch zu geringe Grafik-Auflösung oder durch fehlende Justierung von Grafikschirm oder Ausdruck-Bild hervorgerufen werden, erachten wir als temporär.

2. Erste didaktische Folgerungen für das Geometrielernen

Neue Aspekte des Geometrielernens ergeben sich vor allem bei

- der induktiven Satzaneignung und Begriffsbildung
- der Messung von Strecken, Winkeln und (polygonalen) Flächen
- dem Konstruieren von Ortslinien
- dem Definieren und Anwenden von Makro-Konstruktionen
- dem Lösen von (planimetrischen) Konstruktionsaufgaben

usw.

Der Einsatz geeigneter interaktiver 2-D-Grafiksysteme unterstützt vor allem den explorativen und rekonstruktiven Zugang zur planaren Elementargeometrie. Die konstruktiven Möglichkeiten mit den neuen interaktiven Werkzeugen übertreffen in erheblichem Maße die mit den alten Werkzeugen.

Aus Platzgründen müssen wir hier auf die Illustration dieser Möglichkeiten anhand von Beispielen verzichten.

2.1 Induktive Satzaneignung und Begriffsbidung

Schwächen der induktiven Satzaneignung mittels herkömmlicher Konstruktion von Konfigurationen:

- zeitaufwendige und oft ungenaue Konstruktionen einer genügend großen Anzahl von geeigneten Konfigurationen, die den betreffenden Satz repräsentieren
- nur Sätze zugänglich, die auf weniger komplexen Konfigurationen beruhen
- zeitaufwendige und fehlerhafte Messungen bzw. Berechnungen
- statische Konfigurationen, die bisher meist nur durch mentale Vorstellungen beweglich gemacht werden können. (Piktoralistische These: Mentale Vorstellungen von Figurentransformationen werden analog den realen Transformationen an Figurenmodellen gebildet.)

Entsprechendes gilt für die Bildung von Figurenbegriffen mittels Repräsentanten entsprechender Begriffsumfänge.

Neue Möglichkeit:

Interaktives Variieren von Konfigurationen durch Lageänderung der sie bestimmenden Objekte (sog. Basisobjekte) im Zug-Modus.

Der Übergang von einem Zustand zum anderen erfolgt kontinuierlich (d.h. in Realzeitverarbeitung) durch individuelle Cursorführung.

Konfiguratives Beweglichkeitsprinzip

Beim Einsatz geeigneter interaktiver Grafiksysteme zum geometrischen Konstruieren kann auf die induktive Satzfindung mittels folgender Möglichkeiten des kontinuierlichen Variierens geometrischer Konfigurationen hingearbeitet werden (vgl. Schumann 1989):

- Aus einer Konfiguration in großer Variationsbreite viele weitere isomorphe Konfigurationen (mit stetigen Übergängen, d.h. in Realzeitverarbeitung) erzeugen.
- Stetige Übergänge zwischen Sonderfällen derselben Konfiguration erzeugen.
- Aus einem allgemeinen Fall spezielle Fälle einer Konfiguration durch stetige Übergänge erzeugen.
- Aus einem speziellen Fall allgemeinere Fälle einer Konfiguration durch stetige Übergänge erzeugen.
- Grenzfälle einer Konfiguration durch stetige Übergänge erzeugen.

Realisierung des operativen Prinzips

Die stetige Änderung von geometrischen Konfigurationen mittels geeigneter interaktiver Grafiksysteme ermöglicht eine echt operative Orientierung von Satzfindungsprozessen:

Welche Eigenschaften einer Konfiguration bleiben (nicht) invariant, beim stetigen, individuell durchgeführten Änderungsvorgang?

Elementargeometrische Sätze ergeben sich so als Invarianzaussagen bei stetigem Verändern von geometrischen Konfigurationen.

Entsprechendes kann für die Bildung von Figuren-Begriffen über Begriffsumfänge formuliert werden.

2.2 Messen von Strecken, Winkeln und Flächen

Schwächen des herkömmlichen Messens von Strecken, Winkeln und (polygonalen) Flächen:

- subjektive und werkzeugbedingte Meßfehler (vor allem bei der Winkelmessung)
- zeitaufwendige Berechnungen von (polygonalen) Inhalten
- auf funktionale Zusammenhänge zielende Fragestellungen sind kaum angehbar, da die zu messenden Figuren statisch.

Neue Möglichkeit:

Automatisches Messen von Strecken, Winkeln und (polygonalen) Flächen; dynamisches Messen beim kontinuierlichen Variieren der zu messenden Objekte im Zug-Modus.

2.3 Konstruktion von Ortslinien

Schwächen der herkömmlichen Konstruktion von Ortslinien:

- zeitaufwendiges, stereotypes Wiederholen derselben Konstruktion
- Ungenaue Freihandinterpolation.

Die Konstruktion von Ortslinien wird in der bisherigen Schulgeometrie kaum praktiziert - es reicht, wenn man das in der Analysis macht!

Neue Möglichkeit:

Interaktives Erzeugen von Ortslinien durch individuelles Bewegen eines Punktes auf einer Führungslinie, wobei ein von diesem Punkt konstruktiv abhängiger die Ortslinie Punkt für Punkt erzeugt.

Die interaktive Erzeugung von Ortslinien kann effizient angewandt werden u.a.

- in der heuristischen Phase des Lösens von Konstruktionsaufgaben,
- zur experimentellen Verifikation von Konstruktionsergebnissen,
- bei Untersuchungen zur Lage und Art von Bildmengen bei Abbildungen,
- zur Konstruktion von algebraischen Kurven 2. Ordnung (Kegelschnitten) und höherer Ordnung
- bei formenkundlichen Untersuchungen von Ortslinien spezieller Punkte im Dreieck.

(Schumann 1990)

2.4 <u>Makro-Konstruktionen definieren und anwenden</u>

<u>Schwächen</u> bei der herkömmlichen Ausführung von Grundkonstruktionen oder anderen mehrfach anzuwendenden individuellen Konstruktionen:

Das Ausführen mit den herkömmlichen Werkzeugen

- ermutigt nicht zu einem probierenden Vorgehen (trial and error)
- lenkt vom Konstruktionsziel ab
- schränkt die Genauigkeit der gesamten Konstruktion weiter ein
- ist zeitaufwendig (ohne Gewinn neuer Einsichten) - auch wegen der Vergeßlichkeit und mangelnden Übung
- macht die Konstruktion unübersichtlich wegen der unumgänglichen Hilfslinien
- entspricht nicht der modularen Repräsentationen des Konstruktionsverlaufs in der mentalen Vorstellung ("einem mentalen Großschritt entsprechen viele manuelle Kleinschritte").

<u>Neue Möglichkeit</u>

Interaktives Definieren von Makro-Konstruktionen als grafische Funktionen (durch Anklicken der initialen Objekte und der gewünschten Zielobjekte in einem Zeichnungsunikat - Bewußtwerden: Was war gegeben, was zu konstruieren. Anschließend individuelle Namenseingabe). Interaktives Anwenden von Makro-Konstruktionen durch Anklicken des Namens der Makro-Konstruktion und der Anfangsobjekte: Die Zielobjekte werden zur Weiterverarbeitung ausgegeben. - Zusätzlich zum Definieren des Makros durch direktes Anklicken der Basisobjekte, können die Basisobjekte auch außerhalb einer Figur bzw. Konfiguration vorgegeben werden und sind dort anzuklicken (dazu sind vorher die Makros "Streckenabtragen" und "Winkelantragen" zu definieren).

2.5 Lösen von Konstruktionsaufgaben

Schwächen des Lösens von Konstruktionsaufgaben mit den herkömmlichen Werkzeugen:
- Geringe Unterstützung durch die herkömmlichen Werkzeuge in der heuristischen Phase des Lösungsprozesses.
- Geringe Möglichkeiten der Korrektur von Konstruktionsfehlern.
- Keine Möglichkeit, die Zeichnung anders zu positionieren oder zu variieren (auch der Größe nach).
- keine Möglichkeit, die Konstruktion wiederholen zu lassen.
  usw. (siehe auch unter 2.4).

Neue Möglichkeiten:
Besonders in der heuristischen Phase des Lösens von Konstruktionsaufgaben kommen alle Möglichkeiten des interaktiven Konstruktionswerkzeugs zum Tragen (vgl. Abb. 2). Die heuristische Phase kann dabei durch folgende Aktivitäten beschrieben werden (vgl. Holland 1973):
- Konfiguration zeichnen, die den gegebenen Bedingungen genügt.
- Konfiguration variieren und dabei auf (vollständige) Fallunterscheidungen achten.
- Erste Überlegungen zur Determination ausstellen.
- Konfiguration durch Einzeichnen von Hilfslinien ergänzen.
- Beziehungen von der Konfiguration ablesen.
- Heuristische Strategien anwenden.

Diese Aktivitäten können kraft der neuen Werkzeuge ergänzt werden u.a. durch das Herstellen einer experimentellen Lösung im Zug-Modus und/oder mit interaktiver Ortslinienerzeugung, die den gegebenen Bedingungen genügt.
Die algorithmische Phase ist gekennzeichnet durch die Ausführung des gefundenen Lösungsweges mit Hilfe von Grundkonstruktionen, wobei die Lösung(en) sich aus den gegebenen Objekten (aufgrund nicht zu explizierender geometrischer Aussagen) eindeutig ergeben. Durch die Definition einer Makro-Konstruktion ist diese Phase abzuschließen. Der Wiederhol-Modus gestattet eine Protokollierung des Konstruktionsverlaufs.
Sowohl in der heuristischen als auch in der algorithmischen Phase wird der Schüler unterstützt durch weitere Systemfunktionen. Hinsichtlich der Unterstützung wären die Pfeile in Abbildung 2 noch anhand einer repräsentativen Menge von Konstruktionsaufgaben quantifizierend zu bewerten.
Die analytische Phase der Bearbeitung einer Konstruktionsaufgabe ist i.a. nicht Gegenstand des Geometrieunterrichts der Sekundarstufe. Sie besteht in der nachträglichen

logischen Begründung der Aufweisbarkeit der Lösung und in der systematischen Determination, für die oft synthetisch geometrische Mittel nicht mehr ausreichen.

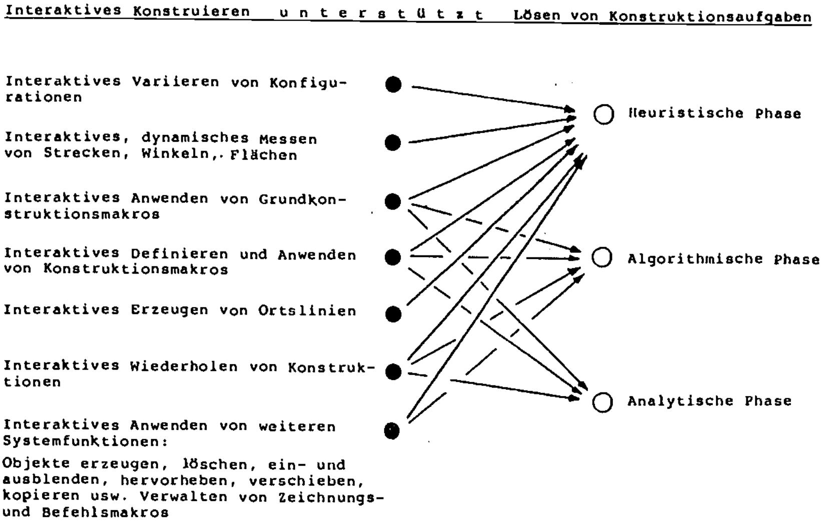


Abb. 2

Literatur (Auswahl):

Holland, G.: Die Bedeutung von Konstruktionsaufgaben für den Geometrieunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1973, S. 11-24

Schumann, H.: Der Computer als Werkzeug zum Konstruieren im Geometrieunterricht. In: ZDM (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik) 1988, Heft 6, S. 248-263

Schumann, H.: Satzfindung durch kontinuierliches Variieren geometrischer Konfigurationen mit dem Computer als interaktivem Werkzeug. In MU (Der Mathematikunterricht) 1989, Heft 4, S. 22-37

Schumann, H.: Interaktives Erzeugen von Ortslinien - ein Beitrag zum computerunterstützten Geometrieunterricht. Erscheint in: ml (mathematik lehren) 1990, Heft 1

Hannu Tuominen (Helsinki)

EXPLORING GRAPHS WITH LOGO

Abstract

The LOGO programming language is well-known as an interactive, easy-to-start programming environment. The turtle graphics enable young children to deal with abstract geometrical concepts. LOGO, however, is also a powerful mathematical tool suitable for learning mathematics at all levels. In this article some examples are exhibited about using LOGO procedures to look at a common geometrical object, the circle, from different points of views, e.g. from the point of view of parametric equations – an approach that will lead to more general objects like ellipses.

LOGO is a famous computer language created by Seymour Papert for the purposes of learning. The best known invention promoted by this language is perhaps the "turtle geometry", an alternative approach to geometry (Abelson & diSessa 1981). Using the turns and movements of the turtle you can create various objects like squares, circles and spirals. LOGO programming and turtle geometry have been used in school mathematics, especially in the lower grades.

In this example LOGO is used in exploring a simple and familiar curve – the circle. What, then could LOGO programming add to what the pupil knows about circles?

We can start with the "classical" turtle way of drawing a circle. The easiest way of moving the turtle and making it draw a curve is to use the basic commands FORWARD, RIGHT and LEFT. As a child makes a circle by taking short steps in snow or sand, a turtle can now draw a circle with the following procedure:

```
TO CIRCLE
REPEAT 360 [FORWARD 1 RIGHT 1]
END
```

Here we find a way of drawing a circle that is dramatically different from what we are used to; instead of having a fixed point and a radius we only have a series of small movements. Indeed, we have met something that could be called *differential geometry.*

The major benefit of this "turtle geometry" is that even the youngest pupils can make the geometrical concepts concrete e.g. by means of "body talk". They can always "play turtle" and think how they themselves would move if they were turtles. Finally we can create microworlds or a whole Mathland, as Seymour Papert expresses it, where mathematics can be explored.

A more conventional way of drawing graphs can, however, also be chosen. LOGO is a powerful language that can be used in many ways. In the "walking in the snow" method we have no way – at least no easy way –of finding the radius or the centre of our circle. Smaller and larger circles can be drawn simply by varying the parameters of the commands FORWARD and RIGHT , but we still do not know how small or large the circles are. But we can also tell the turtle to move according to the Cartesian X and Y coordinates. This is especially practical since in LOGO, unlike many other computer languages, the origin is in the middle of the screen. The pupil hence knows the coordinates of LOGO, they are the same as in the mathematics text books. The commands are short and clear: SETX and SETY.

Here is another way of drawing a circle:

```
TO CIRCLE :A
MAKE "T 0
REPEAT 360 [MOVE]
END

TO MOVE
SETX :A * SIN :T
SETY :A * COS :T
MAKE "T :T + 1
END
```

What are the benefits of applying this kind of a circle procedure? We can see that the centre of our circle is at the origin and its radius is A. So, we now have a procedure which lets us manipulate the radius – and, with a small effort, also the centre. But we also have a procedure which lets us become familiar with parametric equations, a subject that is not one of the simplest ones. It does not seem very practical to compute all the sine and cosine values and then draw the curve with a pencil; a computer, on the contrary, performs the task with no difficulty.

Finally this procedure can be generalized to draw not only circles, but any kinds of ellipses (and indeed many other kinds of curves!). We just add one parameter and modify the procedures a bit:

```
TO ELLIPSE :A :B
MAKE "T 0
REPEAT 360 [MOVE]
END

TO MOVE
SETX :A * SIN :T
SETY :B * COS :T
MAKE "T :T + 1
END
```

We have opened a new microworld, the microworld of parametric equations. This means that we, in a way, have two different kinds of circles. In the first "walking in the snow" world we had circles that consisted of very small steps. In the second world we have exact X and Y coordinates determined by given algebraic functions. New microworlds can be created, e.g. on the basis of the equation $x^2 + y^2 = c^2$ (See also Korhonen 1989). Every new microworld gives us new attributes of the thing called a circle – but no microworld can show us *everything* about it.

Usually we do not think of the circle as a very complex geometrical concept. However, if visualized in different ways with a powerful programming language like LOGO, even a simple little thing like the circle seems to come alive and show its complexity. This is done in a way which lets the pupil get

familiar with the concepts, play with them, vary them and gain full control over them.

References:

Abelson, Harold & diSessa, Andrea A. 1981. Turtle Geometry. The MIT Press, Cambridge, Ma.

Korhonen, Hannu. 1989. Logo-kieli ajattelun välineenä tietokoneavusteisessa matematiikan oppimisessa (Summary: Logo language as a medium of thinking in computer-aided mathematics learning). Institute of Educational Research. Publication series B. Theory into practice 38. Jyväskylä, Finland.

Dr. Andras Ambrus
Edetvös L. Universität Budapest, Institut für Mathematik
Rakoczi-Str. 5.III.336, H-1031 Budapest

Prof.Dr. Gerhard Becker
Universität Bremen, FB Mathematik und Informatik
Postfach 330440, D-2800 Bremen 33

Prof.Dr. Peter Bender
Universität-Gesamthochschule Paderborn, FB 17 - Mathematik/Informatik
Warburger Str. 100, D-4790 Paderborn

Dr. Jorma Enkenberg
University of Joensuu, Department of Teacher Education
Box 111 , SF-80101 Joensuu

Prof.Dr. Anna Maria Fraedrich
Pädagogische Hochschule Ludwigsburg, FB III, Abteilung Mathematik
Reuteallee 46, D-7140 Ludwigsburg

Prof.Dr. Günter Graumann
Universität Bielefeld, Fakultät für Mathematik
Universitätsstr. 1, D-4800 Bielefeld 1

Dr. Lenni Haapasalo
Universität Jyväskylä, Institut für Lehrerausbildung
Seminaarinkatu 15, SF-40100 Jyväskylä

Dr. Konrad Krainer
Universität Klagenfurt / IFF
Universitätsstr. 65-67, A-9022 Klagenfurt

Pekka Kupari
Institute for Educational Research , University of Jyväskylä
Seminaarinkatu 15, SF-40100 Jyväskylä

Prof.Dr. Jarkko Leino
University of Tampere, Department of Education
Pyynikintie 2, SF-33100 Tampere

Prof.Dr. Olof Magne
University of Lund, School of Education
Box 23501, S-20045 Malmö

Prof.Dr. Hermann Maier
Universität Regensburg, Naturw.Fak. I - Mathematik
Universitätsstr. 31, D-8400 Regensburg

Dr. George Malaty
University of Joensuu, Department of Teacher Education
Box 111, SF-80101 Joensuu

Prof.Dr. Kurt Peter Müller
Pädagogische Hochschule Karlsruhe, Fach Mathematik
Bismarckstr. 10, D-7500 Karlsruhe 1

Prof.Dr. Michael Neubrand
Universität Dortmund, Institut für Didaktik der Mathematik
Postfach 500500, D-4600 Dortmund 50

Dr. Erkki Pehkonen
Universität Helsinki, Institut für Lehrerausbildung
Ratakatu 2, SF-00120 Helsinki

Prof.Dr. Günter Pietzsch
Humboldt-Universität, Sektion Mathematik
Postfach 1297, DDR-1086 Berlin

Prof.Dr. Lothar Profke
Universität Giessen, Institut für Didaktik der Mathematik
Karl-Glöckner-Str. 21c, D-6300 Giessen

Erkki Rosenberg
Koroistentie 6c A 7, SF-00280 Helsinki

Pasi Sahlberg
University of Helsinki, Training School I
Ratakatu 4, SF-00120 Helsinki

Prof. Heinz Schumann
Pädagogische Hochschule Weingarten
Kirchplatz 2, D-7987 Weingarten

Hannu Tuominen
University of Helsinki, Department of Teacher Education
Ratakatu 2, SF-00120 Helsinki

Prof.Dr. Margarita Wittoch
Pädagogische Hochschule Ludwigsburg , FB Sonderpädagogik
Reuteallee 46, D-7140 Ludwigsburg

Dr. Eva-Maria Zbick
Universität Duisburg, Fachbereich 11/Mathematik
Lotharstr. 65, D-4100 Duisburg 1

Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitoksen julkaisuja

1. Hytönen, Juhani. 1982. Opettajankoulutuksen teoria-aineksia. Käytännön sovellutuksena Helsingin yliopiston luokanopettajan koulutusohjelma.
2. Hellgren, Paul. 1982. Communicative proficiency in a foreign language, and its evaluation. An analysis of the concept and an experiment with oral proficiency.
3. Leino, Anna-Liisa. 1982. Opetusteknologian funktioita: Kielistudio.
4. Research on teaching and the theory and practice in teacher training. Unterrichtsforschung und die Theorie und Praxis in der Lehrerausbildung. Papers presented at an international symposium in Helsinki, October 2nd and 3rd, 1980. DPA Helsinki Investigations IV edited by Erkki Komulainen.
5. Kauppinen, Sirppa. 1982. Kansakoulun ja oppikoulun äidinkielen opetussuunnitelman kehitys autonomian ajalta 1950-luvulle.
6. Puurula, Arja. 1982. Kasvattajan arvokäsitykset: arvot ja päämäärät maailmankatsomuksen osana — erään teoreettisen mallin ja mittarin kehittelyä.
7. Erätuuli, Matti — Meisalo, Veijo. 1982. Fysiikan ja kemian oppilastöiden evaluaatio. Lähtökohtia peruskoulun yläasteen fysiikan ja kemian oppilastöiden evaluaatiomenetelmien kehittämiseksi.
8. Louhisola, Oiva. 1983. Kasvatustieteen opinnot luokanopettajankoulutuksessa.
9. Lehtonen, Kai R. 1983. Valtiovalta ja oppikirjat: Senaatti ja kouluhallitus oppi- ja kansakoulun oppikirjojen valvojina Suomessa 1870—1884.
10. Pietikäinen, Iija. 1983. The adaptability of the theory of knitted fabric to the designing of hand-made products.
11. Sandelin, Singa. 1983. Studiestil. Att fungera som studerande — förhållningssätt till studieuppgiften och studiegruppen.
12. Jussila, Juhani ja Kansanen, Pertti (toim.) 1983. Matti Koskenniemi: ... Niin mielelläni vielä.
13. Kansanen, Pertti (ed.) 1983. Current research on Finnish teacher education.
14. Sarmavuori, Katri. 1983. Äidinkielen tavoitteiden saavuttaminen peruskoulun ala-asteella ja sen päätösvaiheessa. ABC-projektin raportti 8.
15. Sarmavuori, Katri. 1983. Seitsemäsluokkalaisten persoonallisuus ja äidinkielen tavoitteiden saavuttaminen. ABC-projektin raportti 9.
16. Uusikylä, Kari. 1983. Opettajankoulutus prosessina. Seurantatutkimus Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitoksen luokanopettajan koulutuslinjalla; Osa 1: Tutkimuksen lähtökohdat ja viitekehys; Osa 2: Opettajankoulutuslaitoksen opinnot opiskelijoiden arvioimina.
17. Erätuuli, Matti. 1984. Wie können sich die finnischen Schüler der Schuljahre 7 bis 9 die alltäglichen Phänomene der Wärmelehre erklären.
18. Puurula, Arja. 1984. Koulun työrauha kasvatussosiologisena ongelmana.
19. Niemi, Hannele. 1984. Aineenopettajaharjoittelijoiden persoonallisuus ja vuorovaikutusasenteet.
20. Niemi, Hannele. 1984. Aineenopettajaharjoittelijoiden opetusongelmat, konfliktin sisäistämisprosessi sekä arviot koulutuksestaan ja sen kehittämisestä.
21. Sysiharju, Anna-Liisa. 1984. Intergenerational contacts and urban family life among women and men of different ages in a rapidly changing society.

22. Sysiharju, Anna-Liisa. 1984. Women as educators: Employees of schools in Finland.

23. Gröhn, Terttu. 1984. Oppimisprosessi ja opiskelustrategiat korkeakoulutuksen kehittämisen lähtökohtana. Sovellutusalueena kotitalouden opetus. Tutkimussuunnitelma ja teoreettinen viitekehys.

24. Hautamäki, Airi. 1984. Lukioon lähtö ja sosiaaliluokka. 11—17 vuotiaiden nuorten itsesäätelyn ja ympäristöhallinnan kehitys kodin toimintaympäristön valossa.

25. Koskenniemi, Matti. 1984. Educational aims and the purposiveness of instruction. Sceptical talks.

26. Rikkinen, Hannele. 1984. Kuvien merkitys aluemaantieteellisen tekstin osana.

27. Nieminen, Seija. 1984. Teachers' perception of mental health, its relationship to their mental health and to changes thereof.

28. Lappalainen, Antti. 1985. Peruskoulun opetussuunnitelman syntyprosessi ja peruskouluopetuksen johtamisjärjestelmän muotoutuminen.

29. Sava, Inkeri. 1985. Tekstiilityön opetus tutkimuskohteena. Tutkimusalueet ja tutkimusluettelo.

30. Kansanen, Pertti (ed.) 1985. Discussions on some educational issues.

31. Sava, Inkeri. 1985. Työnohjaus opettajien tietoisuuden kasvun välineenä. Tapaustutkimus kahdesta työnohjausryhmästä.

32. Pehkonen, Erkki. 1985. Peruskoulun geometrian opettamisen periaatteista ja niiden seurauksista opetukseen.

33. Hautamäki, Airi. 1985. Gymnasium eller inte? Pojkars och flickors personlighetsutveckling, verksamhetsmiljö och sociala bakgrund.

34. Koskenniemi, Matti. 1985. Yleissivistävän koulun hallinnon kasvu 1945—84 ja opetustapahtuma.

35. Erätuuli, Matti — Meisalo, Veijo. 1985. Fysiikan ja kemian oppilastöiden evaluaatio II. Luonnontutkimustehtävät fysiikan ja kemian kokeissa.

36. Hellgren, Paul. 1985. Teaching — a social concept.

37. Äidinkieli, koulu ja tutkimus. Juhlakirja Sirppa Kauppisen merkkipäivän johdosta 14.2.1986. Toimittaneet Katri Sarmavuori, Lyyli Virtanen, Maija Larmola.

38. Yli-Renko, Kaarina. 1985. Lukion saksan kielen opetuksen tavoitteet

39. Sarmavuori, Katri. 1985. Äidinkielen taidot ja tavoitteiden saavuttaminen peruskoulun päättövaiheessa. ABC-projektin raportti 10.

40. Pehkonen, Erkki (toim.) 1986. Matematiikan opetuksen tutkiminen ja kehittäminen 1985. 4. matematiikan didaktiikan päivät Helsingissä 27.—28.9.1985.

41. Puurula, Arja. 1986. Study orientations as indicators of ideologies. A study of five student teacher groups.

42. Jussila, Juhani. 1986. Kulutus ja kuluttajakäyttäytyminen. Kuluttajakasvatuksen teorian lähtökohtia.

43. Jussila, Juhani. 1986. Kuluttajakasvatus läpäisyaiheena peruskoulussa ja opettajankoulutuksessa.

44. Hellgren Paul. 1986. Thinking in a foreign language.

45. Kääriäinen, Hillevi. 1986. Oppilaan selvitytyminen koululaisena sekä minäkuvan ja kouluasenteiden kehitys peruskoulun luokilla 1—4.

46. Sarmavuori, Katri. 1986. Äidinkielen opetus ja nuorisokulttuuri lukion 1. luokalla. ABC-projektin raportti 11.

47. Seinelä, Kauko. 1987. Kokeellis-induktiivisen menetelmän toimivuus lukion ensimmäisen luokan fysiikan opetuksessa. Piaget'n teoriaan perustuva tutkimus.

48. Malinen, Paavo ja Kansanen, Pertti (toim.) 1987. Opetussuunnitelman tutkimukselliset kehykset. Opetussuunnitelmatutkijoiden yhteistyöryhmän ja Suomen kasvatustieteellisen seuran järjestämä opetussuunnitelmaseminaari 25.—26.9.1986.

49. Sysiharju, Anna-Liisa. 1987. Nykykaupunkilaisen elämänkulkua kodin jäsenenä. Eri vaiheita elävien työikäisten naisten ja miesten kokemuksia, vuorovaikutus sukupolvien välillä sekä nykykodin vertailuja lapsuuskotiin — edustavasta survey-aineistosta tehdyn jatkoanalyysin valossa.

50. Erätuuli, Matti. 1987. Welche Vorstellungen haben finnische Schüler von den alltäglichen Phänomenen der Wärmelehre (2. Teil).

51. Gröhn, Terttu. 1987. Oppimateriaalin didaktiset ominaisuudet ja yhteydet oppimistuloksiin. Tutkimus peruskoulun 7. luokan kotitalouden opetuksesta.

52. Pietikäinen, Iija. 1987. Tekstiilityötaidon luonnetta kartoittava tutkimus.

53. Malinen, Paavo — Kansanen, Pertti (eds.) 1987. Research frames of the Finnish curriculum.

54. Kansanen, Pertti (ed.) 1987. Discussions on some educational issues II.

55. Pehkonen, Erkki (ed.) 1987. Articles on Mathematics Education.

56. Meisalo, Veijo ja Sarmavuori, Katri (toim.) 1987. Ainedidaktiikan tutkimus ja tulevaisuus.

57. Anttila, Pirkko. 1988. Katso käsillä tunteaksesi. Tutkimus tekstiilimateriaalien tuntuarvioinnin ja fysikaalisten mittaustulosten välisestä vastaavuudesta.

58. Anttila, Pirkko. 1988. The scientific approach to the study of textiles, clothing and related arts.

59. Salminen, Jaakko. 1988. ESY-opettajan eli tarkkailuluokan opettajan saamaansa koulutukseen perustuva kvalifikaatio.

60. Kankaanrinta, Ilta ja Virtanen, Lyyli. 1988. FUTURES länsieurooppalaisten nuorten käsityksiä tulevaisuudestaan.

61. Niemi, Hannele. 1988. Is teaching also a moral craft for secondary school teachers? Cognitive and emotional processes of student teachers in professional development during teacher education.

62. Salmia, Aulikki. 1988. Biologian asema ja sisältö Ruotsin peruskoulussa.

63. Åhlberg, Mauri. 1988. Kasvatustavoitteiden teoreettisen kehikon empiiristä koettelua 2: Tavoiteajattelun indikaattorihypoteesien testausta.

64. Åhlberg, Mauri. 1988. Kasvatustavoitteiden teoreettisen kehikon empiiristä koettelua 3: Tavoitekonstruktit ja arviointiasteikot tavoitearviointien yhteisen vaihtelun selittäjinä.

65. Seinelä, Kauko. 1988. Kokeellis-induktiivisen menetelmän soveltaminen ja koordinointi lukion fysiikan kurssiin.

66. Uusikylä, Kari — Kansanen, Pertti. 1988. Opetussuunnitelman toteutuminen. Oppilaan tyytyväisyys oppiaineisiin, opetusmuotoihin ja kouluelämään peruskoulun ala-asteella.

67. Koskinen, Irina. 1988. Hyvästit kieliopille. Äidinkielen kielioppi suomenkielisessä oppikoulussa ja kansakoulussa vuoden 1843 koulujärjestyksestä peruskoulu-uudistukseen.

68. Meisalo, Veijo — Sarmavuori, Katri (toim.) 1988. Ainedidaktiikan tutkimus ja tulevaisuus II.

69. Kääriäinen, Hillevi — Rikkinen, Hannele. 1988. Siirtyminen peruskoulun ala-asteelta yläasteelle oppilaiden kokemana.

70. Kansanen, Pertti. 1989. Didaktiikan tiedetausta. Kasvatuksen teoriaa didaktiikan näkökulmasta.

71. Puurula, Arja. 1989. Osallistuminen ja yhteistoiminta. Triangulaatiotutkimus koulutuksen vaikuttavuudesta eräässä organisaatiossa.

72. Yli-Renko, Kaarina. 1989. Suullinen kielitaito ja sen mittaaminen lukion päättövaiheessa.

73. Marjut Laitinen. 1989. Musiikinopettajien valinnat, aineenhallinta ja opetustaito.

ISBN 951-45-5200-8
ISSN 0359-4203
Helsinki 1989
Yliopistopaino

NOTICE

REPRODUCTION BASIS

☑ This document is covered by a signed "Reproduction Release (Blanket)" form (on file within the ERIC system), encompassing all or classes of documents from its source organization and, therefore, does not require a "Specific Document" Release form.

☐ This document is Federally-funded, or carries its own permission to reproduce, or is otherwise in the public domain and, therefore, may be reproduced by ERIC without a signed Reproduction Release form (either "Specific Document" or "Blanket").